



**UNIVERSIDAD  
COMPLUTENSE  
MADRID**

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Dpto. Análisis Matemático y Matemática Aplicada

TRABAJO FIN DE GRADO

**EXISTENCIA GLOBAL DE SOLUCIONES Y  
ESTABILIDAD EN SISTEMAS DE DOS ESPECIES  
DEPREDADOR-PRESA CON DIFUSIÓN Y  
QUIMIOTAXIS**

Víctor Navarro Fernández  
vinavarr@ucm.es

Julio 2019

---

Tutora: Mihaela Negreanu Pruna



## Abstract

In the present work a nonlinear system of reaction-diffusion partial differential equations describing the evolution of a prey-predator biological system with chemotaxis is studied. The system consists of three equations, two parabolic equations corresponding to the active predators and preys, and an ordinary equation corresponding to a special term related to the dormant predators. Chemotaxis in this context affects to the active predators such that they will move towards the regions in which the density of resting eggs (dormant predators) is larger. To properly accomplish this study first a literature review on some prey-predator chemotaxis systems and with dormant predators term is conducted. Then we use classical methods for parabolic-parabolic-ordinary equations to prove the local existence of solutions and the Moser-Alikakos iterative method to find bounds in  $L^\infty$ , hence we obtain global existence of solutions in our system. Finally a brief numerical approximation is achieved in order to get a better understanding of the behavior of our system.

## Resumen

En este trabajo se estudia un sistema no lineal de reacción-difusión de ecuaciones en derivadas parciales que describe la evolución de un sistema biológico depredador-presa con quimiotaxis. El sistema está compuesto por tres ecuaciones, dos de ellas parabólicas correspondientes a los depredadores activos y a las presas, y una ordinaria correspondiente a depredadores inactivos. La quimiotaxis en este contexto afecta a los depredadores activos de modo que dirigen su movimiento hacia las zonas en las que la densidad de depredadores inactivos es mayor. Para llevar a cabo este estudio primero se realiza una revisión bibliográfica sobre algunos sistemas depredador-presa con quimiotaxis y con término de depredadores inactivos. Posteriormente se utilizan métodos clásicos para ecuaciones parabólicas-parabólicas-ordinarias para demostrar la existencia local de soluciones en nuestro sistema, y el método iterativo de Moser-Alikakos para construir acotaciones uniformes. Finalmente se realiza una breve aproximación numérica para obtener una mejor comprensión del comportamiento del sistema biológico.





# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Resultados previos</b>	<b>7</b>
1.1. Resultados previos . . . . .	7
1.2. Hipótesis . . . . .	10
<b>2. Modelización</b>	<b>11</b>
2.1. Sistema con término de depredadores en estado de inactividad . . . . .	12
2.2. Sistema de dos especies con quimiotaxis . . . . .	13
2.3. Sistema con quimiotaxis y depredadores en estado de inactividad . . . . .	14
<b>3. Sistema con término de depredadores en estado de inactividad</b>	<b>17</b>
3.1. Análisis de la estabilidad para el caso $n(w) = 0$ . . . . .	17
<b>4. Sistema de dos especies con quimiotaxis</b>	<b>21</b>
4.1. Existencia local y global de soluciones . . . . .	23
4.2. Comportamiento asintótico para el caso $g(u) = ku$ . . . . .	24
<b>5. Sistema con quimiotaxis y término de depredadores inactivos</b>	<b>27</b>
5.1. Existencia local de soluciones . . . . .	29
5.2. Acotación en $L^p$ y existencia global . . . . .	35
<b>6. Aproximación numérica</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>43</b>



## Introduction

History of natural sciences is replete of succesful moments in which a mathematician comes upon a model that fits almost perfectly to the experimental behavior of the Universe: since Hooke's law and Boyle-Mariotte's to Bernouilli's principle or Schrödinger's equation. In physics or chemistry mathematical development has hit ealier since the subjects of study are mostly inert. However in biology or ecology, the mathematical work has arrived later, the subjects of study are more complex, alive and present random and unpredictable changes in time.

One of the first solid models in biology was Lotka-Volterra's prey-predator system. On the one hand it was Alfred J. Lotka who proposed this nonlinear differential equations system first to explain the theory of autocatalytic reactions (1910), nonetheless a brief period of time after he was capable to extend it to *organic systems* using plant species and herbivorous animals (1920). Finally he used the equations of the model to analyze the prey-predator interactions in his book about mathematical biology *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins, 1925. On the other hand and following a parallel trajectory to Lotka's, the italian mathematician Vito Volterra developed himself a set of equations (1926) inspired by Umberto D'Ancona's study about fish captures in Adriatic Sea before and during the Great War (1914-18). D'Ancona realized the number of predators had grown considerably during the war years and this fact disoriented him since precisely those year fishing activity was significantly reduced. Volterra's model though was able to explain with precission the variations on the number of preys and predators.

That first model only counted on the changes in time of the total number of preys and predators due to its interaction. The model was improved with the years and spatial dynamics started also to be considered. Initially diffusion of species was added, product of the well-known *brownian movement*, giving this way a reaction-diffusion system that was studied originally by Turing (1952). Afterwards the concept of chemotaxis was introduced, referred to the ability of predators to move towards the regions in which the concentration's gradient of prey is larger (prey-taxis) and the ability of preys to move towards the regions in which the concentration's gradient of predator is smaller (predator-taxis). This mechanism was firstly presented in the 70s by Keller and Segel to study the concentration of amoeba *Dyctiostelium discoideum*.

In the present work three predator-prey systems of partial differential equations which model some typical situations in ecology are presented. To start with, a parabolic-parabolic-ordinary reaction-diffusion system is studied, without chemotaxis, with an active predators term  $u$ , a dormant predators term  $w$  (corresponding to the resting eggs) and the preys term  $v$ . This system is analysed by Kuwamura [8] and presents the following expression,

$$\begin{cases} u_t = d_u \Delta u + g_1(u, v, w), \\ v_t = d_v \Delta v + g_2(u, v, w), \\ w_t = g_3(u, v, w), \end{cases} \quad (1)$$

where Kuwamura gives some concrete form to the functions  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$ .

Next in order a reaction-diffusion parabolic-parabolic system is presented. This model is considered by Wu, Wang and Shi [15] and brings the chemotactic term in the preys equation up, directing its movement towards the regions in which the density of predators is lower. The system takes the following form,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f_1(u, v), \\ v_t = d \Delta v + \xi \nabla \cdot (q(v) \nabla u) + f_2(u, v), \end{cases} \quad (2)$$

where Wu, Wang and Shi choose specific expression for the functions  $f_1$  y  $f_2$ .

The main intention of this thesis arises inspired on Kuwamura's and Wu, Wang and Shi's researches. We present a reaction-diffusion of parabolic-parabolic-ordinary equations system with chemotaxis consisting of an active predators term  $u$ , the preys  $v$  and the dormant predators term  $w$  as well as Kuwamura's system. Moreover chemotaxis is included in active predators equation that makes them move towards the regions in which the concentration gradient of dormant predators is larger. In this system active predators present a protective tendency to its resting eggs (dormant predators) that affects their movement as a prey-taxis term does. The model is described by a system of three partial differential equations as follows,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w) + h_1(u, v, w) & \text{in } \Omega \times (0, T_{max}), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + h_2(u, v, w) & \text{in } \Omega \times (0, T_{max}), \\ \frac{\partial w}{\partial t} = h_3(u, v, w) & \text{in } \Omega \times (0, T_{max}), \end{cases} \quad (3)$$

with initial data

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0(x) & x \in \Omega, \\ v(0, x) &= v_0(x) & x \in \Omega, \\ w(0, x) &= w_0(x) & x \in \Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

and Neumann boundary conditions

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \quad (5)$$

We work in an open bounded set  $\Omega$  with smooth boundary and functions  $h_1$ ,  $h_2$  and  $h_3$  take the following expression,

$$\begin{aligned} h_1(u, v, w) &= k\mu(v)\phi(u, v) + \alpha(v)w - g(u), \\ h_2(u, v, w) &= f(v) - \phi(u, v), \\ h_3(u, v, w) &= k\nu(v)\phi(u, v) - \alpha(v)w - n(w)w. \end{aligned} \quad (6)$$

In addition  $d$  is the diffusion coefficient,  $\chi$  the function responsible of chemotaxis and the rest of the functions  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $f$ ,  $\phi$ ,  $\alpha$ ,  $g$  and  $n$  have a biological justification.

To prove the existence of local and uniformly bounded solutions to our system we use classical results for parabolic-parabolic-ordinary systems for the local existence in time and Moser-Alikakos iterative method to find bounds in  $L^\infty$ .

Our principal result is the Theorem 5.0.1 presented in Chapter 5 and summarised here.

**Theorem.** *Let  $\Omega$  be a bounded domain in  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) with smooth boundary  $\partial\Omega$ . Let  $d, k \geq 0$ ,  $\chi(w)$ ,  $f(v, x)$ ,  $g(u, x)$  and  $\phi(u, v, x)$  be such that verify some assumptions. Then for all  $(u_0, v_0, w_0) \in (W^{1,p}(\Omega))^3$ , such that  $u_0(x) \geq 0$ ,  $v_0(x) \geq 0$ ,  $w_0(x) \geq 0$  for  $x \in \overline{\Omega}$ , system (3) has a unique global classical solution  $(u(x, t), v(x, t), w(x, t))$  satisfying*

$$(u, v, w) \in (C([0, \infty); W^{1,p}(\Omega)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, \infty)))^3.$$

*In addition  $(u(x, t), v(x, t), w(x, t))$  is uniformly bounded in  $\Omega \times (0, \infty)$ , this means that there exists constants  $C_1(u_0, v_0, w_0)$ ,  $C_2(u_0, v_0, w_0)$ ,  $C_3(u_0, v_0, w_0) > 0$  such that  $\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq C_1$ ,  $\|v(\cdot, t)\|_\infty \leq C_2$  and  $\|w(\cdot, t)\|_\infty \leq C_3$ .*

This report is organized as follows. In Chapter 2 modelling is studied, the partial differential equations system that we will study is constructed and an explanation of the biological justifications is provided. In Chapter 3 Kuwamura's study with dormant predator term and without chemotaxis is presented focusing on the dynamical behavior and stability of steady states. In Chapter 4 we present Wu, Wang and Shi's research about the predator-prey system with chemotaxis focusing on global existence of solutions and asymptotic behavior. Chapter 5 constitutes the main core of the thesis, here the system with dormant predators and chemotaxis is studied so as to global existence of solutions is proved. To sum up we conclude with a brief numerical study of the system in Chapter 6.

Currently we are completing and optimising conditions for stability and uniform asymptotic behavior of solutions where we have applied Routh-Hurwitz's Criterion and Lyapunov-type energy methods. Results will be used in the composition of an article, at present in an advanced state of development.

## Introducción

La historia de las ciencias naturales está repleta de momentos exitosos en los que un matemático da con un modelo que se ajusta de manera casi perfecta al comportamiento del mundo natural y del Universo: desde la ley de Hooke o de Boyle-Mariotte hasta el principio de Bernoulli o la ecuación de Schrödinger. En el campo de la física o de la química el desarrollo matemático ha sucedido de manera más temprana ya que los objetos de estudio son, en su mayoría, inertes. Mientras tanto en la biología y la ecología el trabajo matemático ha llegado más tarde, los objetos de estudio son más complejos, están vivos y cambian con el tiempo de maneras, hasta hace poco, imprevisibles.

Uno de los primeros modelos sólidos que se propuso en el campo de la biología y la ecología fue el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra. Inicialmente Alfred J. Lotka propuso este modelo de ecuaciones diferenciales no lineales para explicar la teoría de las reacciones químicas autocatalíticas (1910), sin embargo poco tiempo después fue capaz de extenderlo a *sistemas orgánicos* usando especies de plantas y animales hervíboros como ejemplo (1920). Finalmente utilizó las ecuaciones de este modelo para analizar las interacciones depredador-presa en su libro sobre matemática biológica *Elementos de Biología Física*, Williams and Wilkins, 1925. Paralelamente al trabajo de Lotka, el matemático italiano Vito Volterra desarrolló el mismo conjunto de ecuaciones (1926) inspirado en el estudio de Umberto D'Ancona sobre las capturas de peces en el Mar Adriático antes y durante la Primera Guerra Mundial (1914-18). D'Ancona se dio cuenta de que el número de depredadores había crecido notablemente durante los años de la guerra y esto le provocaba un contrasentido, ya que durante esos años la pesca se había reducido considerablemente. El modelo de Volterra sin embargo explicaba perfectamente las variaciones en el número de depredadores y de presas.

Este primer modelo solo consideraba los cambios en el tiempo de la cifra total de depredadores y presas producto de su interacción. Este modelo se fue perfeccionando y comenzaron a considerarse también las dinámicas espaciales de las especies depredador y presa. En primer lugar se introdujo la difusión de las especies, que encajaba en el ya estudiado *movimiento browniano* obteniendo así un sistema de reacción-difusión que fue estudiado en primer lugar por Turing (1952). Posteriormente se introdujo el concepto de quimiotaxis, referido a la capacidad de los depredadores de moverse hacia los puntos en los que el gradiente de la concentración de presa

es mayor (prey-taxis) y a la capacidad de las presas de moverse hacia los puntos en los que el gradiente de la concentración de depredadores es menor (predator-taxis). Este mecanismo fue introducido en los modelos matemáticos inicialmente por Keller y Segel en los años 70 para estudiar la concentración de la ameba *Dyctiostelium discoideum*.

En este trabajo se presentan tres sistemas depredador-presa de ecuaciones en derivadas parciales que modelizan algunas situaciones típicas en ecología. En primer lugar se estudia un sistema parabólico-parabólico-ordinario de reacción-difusión, sin quimiotaxis, con un término de depredadores activos  $u$ , otro de depredadores inactivos  $w$  (correspondientes los huevos o crías de los depredadores) y otro de presas  $v$ . Este sistema es analizado por Kuwamura en [8] y tiene la siguiente forma,

$$\begin{cases} u_t = d_u \Delta u + g_1(u, v, w), \\ v_t = d_v \Delta v + g_2(u, v, w), \\ w_t = g_3(u, v, w), \end{cases} \quad (7)$$

donde Kuwamura asigna formas especiales para las funciones  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$ .

En segundo lugar se presenta un sistema analizado por Wu, Wang y Shi en [15] de ecuaciones en derivadas parciales parabólico-parabólico de reacción-difusión con quimiotaxis en el término de la presa  $v$  que hace que su movimiento se dirija a las zona en las que el gradiente de la concentración de depredadores  $u$  es menor.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f_1(u, v), \\ v_t = d \Delta v + \xi \nabla \cdot (q(v) \nabla u) + f_2(u, v), \end{cases} \quad (8)$$

donde Wu, Wang y Shi asignan formas especiales para las funciones  $f_1$  y  $f_2$ .

El punto central de este trabajo surge inspirado en los estudios de Kuwamura y Wu, Wang y Shi. Planteamos un sistema de reacción-difusión parabólico-parabólico-ordinario con quimiotaxis. El sistema consta de término de depredadores activos  $u$ , presas  $v$  y depredadores inactivos  $w$ . Además incluimos un término quimiotáctico en los depredadores activos que hace que dirijan su movimiento hacia las zonas en las que el gradiente de concretación de depredadores inactivo crece. En nuestro sistema los depredadores activos tienen una tendencia protectora hacia sus huevos o crías que hace que se sientan atraídos a las zonas en las que hay más de estas. El modelo está descrito por un sistema de tres ecuaciones en derivadas parciales como sigue,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d \Delta u - \nabla \cdot (u \chi(w) \nabla w) + h_1(u, v, w) & \text{en } \Omega \times (0, T_{max}), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + h_2(u, v, w) & \text{en } \Omega \times (0, T_{max}), \\ \frac{\partial w}{\partial t} = h_3(u, v, w) & \text{en } \Omega \times (0, T_{max}), \end{cases} \quad (9)$$

con datos iniciales

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0(x) & x \in \Omega, \\ v(0, x) &= v_0(x) & x \in \Omega, \\ w(0, x) &= w_0(x) & x \in \Omega, \end{aligned} \quad (10)$$

y con condiciones de contorno de Neumann

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad x \in \partial \Omega, \quad t > 0. \quad (11)$$

Trabajamos en un conjunto abierto y acotado  $\Omega$  con frontera regular y las funciones  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$  tienen la siguiente forma,

$$\begin{aligned} h_1(u, v, w) &= k\mu(v)\phi(u, v) + \alpha(v)w - g(u), \\ h_2(u, v, w) &= f(v) - \phi(u, v), \\ h_3(u, v, w) &= k\nu(v)\phi(u, v) - \alpha(v)w - n(w)w. \end{aligned} \tag{12}$$

Además  $d$  es el coeficiente de difusión,  $\chi$  la función respuesta de la quimiotaxis y el resto de funciones  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $f$ ,  $\phi$ ,  $\alpha$ ,  $g$  y  $n$  tienen una justificación biológica.

Para demostrar la existencia de soluciones locales y uniformemente acotadas a nuestro sistema vamos a utilizar resultados clásicos para sistemas de ecuaciones parabólica-parabólica-ordinaria para probar la existencia local en el tiempo y el método iterativo de Moser-Alikakos para probar las acotaciones en  $L^\infty$ .

El resultado principal es el Teorema 5.0.1 que se presenta en el Capítulo 5 y que se resume a continuación.

**Teorema.** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) con frontera  $\partial\Omega$  regular. Sean  $d, k \geq 0$ ,  $\chi(w)$ ,  $f(v, x)$ ,  $g(u, x)$  y  $\phi(u, v, x)$  tales que cumplen ciertas hipótesis. Entonces para todo  $(u_0, v_0, w_0) \in (W^{1,p}(\Omega))^3$ , tales que  $u_0(x) \geq 0$ ,  $v_0(x) \geq 0$ ,  $w_0(x) \geq 0$  para  $x \in \bar{\Omega}$ , el sistema (10) tiene una única solución clásica global  $(u(x, t), v(x, t), w(x, t))$  que satisface*

$$(u, v, w) \in (C([0, \infty); W^{1,p}(\Omega)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, \infty)))^3.$$

Además  $(u(x, t), v(x, t), w(x, t))$  está uniformemente acotado en  $\Omega \times (0, \infty)$ , es decir, existen constantes  $C_1(u_0, v_0, w_0)$ ,  $C_2(u_0, v_0, w_0)$ ,  $C_3(u_0, v_0, w_0) > 0$  tales que  $\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq C_1$ ,  $\|v(\cdot, t)\|_\infty \leq C_2$  y  $\|w(\cdot, t)\|_\infty \leq C_3$ .

El trabajo se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se estudia la modelización deduciéndose el sistema de ecuaciones que estudiaremos y explicando las justificaciones biológicas del modelo. En el Capítulo 3 se expone el estudio de Kuwamura del sistema con depredadores inactivo y sin quimiotaxis haciendo énfasis en el comportamiento dinámico y la estabilidad de los puntos estacionarios. En el Capítulo 4 se presenta el estudio de Wu, Wang y Shi sobre el sistema con quimiotaxis depredador-presa, esta vez haciendo énfasis en la existencia global de soluciones y el comportamiento asintótico. El Capítulo 5 constituye el núcleo del trabajo, en él se analiza el sistema con quimiotaxis y término de depredadores inactivos, además se demuestra la existencia global de soluciones. Por último el trabajo se cierra con un breve estudio numérico del sistema en el Capítulo 6.

Actualmente estamos acabando y optimizando las condiciones para obtener el comportamiento asintótico uniforme de las soluciones donde hemos aplicado técnicas de linealización de ecuaciones, el criterio de Routh-Hurwitz y métodos de energía de tipo Lyapunov. Los resultados se utilizarán para la redacción de un artículo, en estado bastante avanzado de preparación.





# Capítulo 1

## Resultados previos

En este capítulo se recogen algunos resultados previos que se utilizarán en las demostraciones a lo largo del trabajo, así como las hipótesis con las que trabajaremos.

### 1.1. Resultados previos

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto, acotado y con frontera regular.

**Definición 1.1.1.** Sea  $1 \leq p < \infty$ , se define el espacio  $L^p$ ,

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f|^p < \infty\}.$$

Para  $p = \infty$  se define el espacio  $L^\infty$ ,

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists M \text{ tal que } |f| \leq M < \infty \text{ en c.t.p.}\}.$$

Definimos las normas  $\|\cdot\|_p$  y  $\|\cdot\|_\infty$  en los espacios  $L^p$  con  $p < \infty$  y  $L^\infty$ , respectivamente, como sigue:

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p},$$

$$\|f\|_\infty = \min\{M \geq 0 \mid |f| \leq M \text{ en c.t.p.}\}.$$

**Definición 1.1.2.** Definimos los siguientes espacios de Sobolev:

$$H^1(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq C < \infty\},$$

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \int_{\Omega} |\nabla u|^p \leq C < \infty\},$$

$$W^{q,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^s u \in L^p(\Omega), \forall |s| \leq q\}.$$

**Lema 1.1.3** (Desigualdad de Hölder). Sean  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $g \in L^q(\Omega)$  con  $p$  y  $q$  conjugados tal que  $1 = 1/p + 1/q$  con  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ , entonces  $fg \in L^1(\Omega)$  y

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Definición 1.1.4.** Sea un polinomio  $p(x)$  de grado  $n$  con coeficientes  $a_k \in \mathbb{R}$ , que escribimos de la forma,

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (1.1)$$

donde suponemos que  $a_n \neq 0$ . Se define la tabla de Routh como sigue,

$$\begin{array}{ccccccc} r_{(1,1)} & r_{(1,2)} & r_{(1,3)} & \cdots & r_{(1,N)} & & \\ r_{(2,1)} & r_{(2,2)} & r_{(2,3)} & \cdots & & & \\ r_{(3,1)} & r_{(3,2)} & r_{(3,3)} & \cdots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ r_{(n+1,1)} & & & & & & \end{array} \quad (1.2)$$

donde  $N = n/2 + 1$  si  $n$  par y  $N = (n-1)/2 + 1$  si  $n$  impar. Los coeficientes  $r_{(i,j)}$  se definen,

1.  $r_{(1,j)} = a_{n-2j+2}$ , es decir,  $r_{(1,1)} = a_n$ ,  $r_{(1,2)} = a_{n-2}$ , etc.
2.  $r_{(2,j)} = a_{n-2j+1}$ , es decir,  $r_{(2,1)} = a_{n-1}$ ,  $r_{(2,2)} = a_{n-3}$ , etc.
3. Para el resto de elementos  $r_{(i,j)}$  se sigue la siguiente relación de recursividad,

$$r_{(i,j)} = r_{(i-2,j+1)} - \frac{r_{(i-2,1)}}{r_{(i-1,1)}} r_{(i-1,j+1)}. \quad (1.3)$$

Para el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones es necesario aplicar el siguiente criterio al polinomio caraterístico de la matriz de la linealización alrededor de los puntos estacionarios.

**Teorema 1.1.5** (Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz). Sea un polinomio  $p(x)$  de grado  $n$  con coeficientes  $a_k \in \mathbb{R}$  que escribimos de la forma,

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde suponemos que  $a_n \neq 0$ . Entonces se verifica,

1. Si algunos de los coeficientes  $a_k$  es cero o negativo ante la presencia de al menos un coeficiente positivo, entonces hay al menos una raíz imaginaria o que tiene parte real positiva, es decir, el sistema no es estable.
2. El número de raíces del polinomio  $p(x)$  con parte real positiva es igual al número de cambios de signo en la sucesión  $r_{(j,1)}$  de términos de la primera columna de la tabla de Routh.
3. Todas las raíces del polinomio  $p(x)$  tienen parte real negativa y por lo tanto el sistema es estable si y solo si todos los coeficientes del polinomio son positivos y todos los términos de la primera columna de la tabla de Routh tienen signo positivo.

**Teorema 1.1.6** (Principio del Máximo de Hopf para ecuaciones parabólicas). Sea una función  $u \in C(\bar{\Omega} \times [0, T]) \cap C^2(\Omega \times (0, T))$  definida en  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$  que satisface

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x, t) u - \frac{\partial u}{\partial t} = f \quad (1.4)$$

en el dominio abierto  $\Omega \times (0, T)$  donde los coeficientes  $a_{ij}$  constituyen una matriz simétrica localmente definida positiva en  $\Omega \times (0, T)$ , con  $a_i(x)$  localmente acotados para todo  $i = 0, 1, \dots, n$  y  $f \geq 0$  en  $\Omega \times (0, T)$ .

Si existe  $x_0 \in \Omega \times (0, T)$  tal que  $u(x_0) = \min_{x \in \overline{\Omega} \times [0, T]} u$  y si  $u(x_0) \leq 0$ , entonces  $u$  es constante en  $\Omega \times (0, T)$ .

**Corolario 1.1.7** (al Principio del Máximo). Sea  $u \in C(\overline{\Omega} \times [0, T]) \cap C^2(\Omega \times (0, T))$  que satisface (1.4)  $f \geq 0$  en  $\Omega \times (0, T)$  bajo las mismas hipótesis que en el Teorema. Si  $u \geq 0$  en la frontera de  $\Omega \times (0, T)$ ,

1. o bien  $u > 0$  en  $\Omega \times (0, T)$ ,
2. o bien  $u \equiv 0$  en  $\Omega \times (0, T)$ .

**Lema 1.1.8** (Lema de Comparación). Sea la ecuación diferencial escalar,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

donde  $f(t, u)$  es continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $u$  para todo  $t \geq 0$  y todo  $u \in \Omega$ . Sea  $[0, T_{\max})$  el intervalo maximal de existencia de la solución  $u(t) \in \Omega$ . Sea  $v(t) \in \Omega$  una función continua cuya derivada lateral derecha  $D^+v$  satisfice la desigualdad diferencial,

$$D^+v(t) \leq f(t, v), \quad v(0) \leq u_0, \quad (1.6)$$

para todo  $t \in [0, T_{\max})$ . Entonces  $v(t) \leq u(t)$  para todo  $t \in [0, T_{\max})$ .

**Lema 1.1.9** (Alikakos). Sea  $m \geq 1$  y sea  $w(x, t)$  solución de,

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta(|w|^m \operatorname{sgn} w) + B(x, t)w & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \leq 0 & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ w(x, 0) = w_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (1.7)$$

donde  $w_0 \in L^\infty(\Omega)$ . Sean  $c_1$  y  $c_2$  constantes que verifican que  $B(x, t) < c_1$  y

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\Omega} |w|^m dx < c_2. \quad (1.8)$$

Entonces existe una constante  $c_3$  tal que,

$$\sup_{t \geq 0} \|w\|_\infty < c_3 \max \left\{ 1, \sup_{t \geq 0} \left( \int_{\Omega} |w|^m dx \right)^{1/m}, \|w_0\|_\infty \right\}. \quad (1.9)$$

## 1.2. Hipótesis

Para la demostración del Teorema 5.0.1 tenemos que trabajar bajo unas hipótesis razonables con sentido biológico y matemático. Estas hipótesis son referidas al sistema de ecuaciones en derivadas parciales principal de este trabajo (5.1).

- En primer lugar es necesario que las funciones correspondientes a las condiciones iniciales verifiquen que,

$$(u_0, v_0, w_0) \in (W^{1,p}(\Omega))^3 \quad (1.10)$$

para cualquier  $1 \leq p \leq \infty$ . Además deben verificar las condiciones de contorno homogéneas de Neumann,

$$\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v_0}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w_0}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \quad (1.11)$$

Con respecto a las funciones implicadas en el sistema (10)- (13) las hipótesis que deben verificar son las siguientes:

- (h<sub>0</sub>) Las funciones  $g, n : [0, \infty) \times \bar{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f : [0, \infty) \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi : [0, \infty) \times [0, \infty) \times \bar{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$  y  $\mu, \nu : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  son al menos de clase  $C^2$  y verifican  $f(0, x) = 0$ ,  $g(0, x) = 0$ ,  $\alpha(0) = 0$ ,  $\phi(u, 0, x) = 0$  y  $\phi(0, v, x) = 0$  para todo  $u, v \geq 0$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ .
- (h<sub>1</sub>)  $\exists B > 0$  tal que  $\phi(u, v, x) \leq Bu$  para todo  $u, v \geq 0$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ .
- (h<sub>2</sub>) La función respuesta de la quimiotaxis  $\chi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  verifica  $\chi \in C^{1+\theta} \cap L^1[0, \infty)$  para  $\theta > 0$ .
- (h<sub>3</sub>)  $\exists D > 0$  tal que  $g(u, x) \geq Du$  para todo  $u \geq 0$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $n(w) > D$  para todo  $w \geq 0$ , y que verifica que  $D > kB$ .
- (h<sub>4</sub>)  $\exists E, F > 0$  tal que  $f(v, x) \leq Ev - Fv^2$  para todo  $v \geq 0$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ .
- (h<sub>5</sub>) Las derivadas de la función  $h_3$  de (13) con respecto a  $u$  y  $v$  verifican que,

$$\frac{\partial h_3}{\partial u} \Big|_{(u,v,w)} \geq 0, \quad \frac{\partial h_3}{\partial v} \Big|_{(0,v,w)} \geq 0, \quad (1.12)$$

para todo valor de  $u$ ,  $v$  y  $w$ . En nuestro sistema, como conocemos la expresión de  $h_3$ , podemos imponerle estas hipótesis a las propias funciones que constituyen  $h_3$  tal y como hacemos con (h<sub>1</sub>)-(h<sub>5</sub>). No obstante estas condiciones para  $h_3$  son generales para cualquier sistema parabólico-parabólico-ordinario.

- (h<sub>6</sub>)  $\exists M > 0$  tal que  $h_3(0, 0, w) \geq -M/\chi(w)$ , para todo valor de  $w$ . Además en relación a las constantes de las hipótesis (h<sub>1</sub>) y (h<sub>3</sub>),  $M$  verifica que  $M < D - kB$ .

## Capítulo 2

# Modelización

En este capítulo se expone la modelización de un sistema de dos especies depredador-presa con quimiotaxis y con dos ecuaciones para la población de depredador, activos e inactivos, que da como resultado el sistema de ecuaciones en derivadas parciales que estudiaremos posteriormente.

Sea  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y acotado con frontera  $\partial\Omega$  regular. Sea  $t_0 \geq 0$  un instante inicial y un conjunto arbitrario  $\omega \subset \Omega$ . Sea  $u : \Omega \times [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$  la densidad de población  $u$ , es decir, la cantidad de miembros de la especie  $u$  por unidad de volumen en el punto  $x \in \Omega$  y el instante  $t \in [t_0, T)$ . Estudiamos la población de una especie en el interior de dicho conjunto. La ecuación de continuidad en su forma integral resulta,

$$\underbrace{\int_{\omega} u(x, t) dx}_{\text{población en } t} = \underbrace{\int_{\omega} u(x, t_0) dx}_{\text{población en } t_0} - \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{\partial\omega} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}) d\sigma}_{\text{flujo en la frontera}} + \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{\omega} \Gamma(u, v, w) dx dt}_{\text{creación/destrucción}}, \quad (2.1)$$

donde:

1. El término de la izquierda es la cantidad de miembros de la especie  $u$  en el instante  $t \geq t_0$  que se encuentra en el interior de  $\omega$ .
2.  $\mathbf{J}$  representa el flujo de la especie  $u$  a través de la frontera del recinto, cuyo vector normal es  $\mathbf{n}$ . Este flujo puede depender de varios factores. Si la población  $u$  sufre difusión, es decir, los individuos son separados debido a su densidad de población, habrá un término  $-d\nabla u$ . Si la quimiotaxis de la sustancia  $w$  afecta a la densidad de  $u$ , tendremos un término  $\pm u\chi(w)\nabla w$ , donde  $\chi(w)$  es el término quimiotáctico, que únicamente depende de la cantidad de sustancia  $w$ . En general este término tendrá signo positivo  $+$  cuando afecta a la población de la presa, y signo negativo  $-$  cuando afecta a la población del depredador.
3.  $\Gamma(u, v, w)$  es una función que incluye la creación/destrucción de la especie, que incluye tasas de natalidad, muerte e interacciones entre las poblaciones de depredador, presa y sustancia quimiotáctica.

En (2.1) reagrupamos los dos primeros términos y aplicamos el teorema de la divergencia a la integral del flujo, para obtener

$$\int_{\omega} (u(x, t) - u(x, t_0)) dx = - \int_{t_0}^t \int_{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dx dt + \int_{t_0}^t \int_{\omega} \Gamma(u, v, w) dx dt. \quad (2.2)$$

Con el objetivo de agrupar todo bajo una misma integral podemos escribir el término de la izquierda,

$$\int_{\omega} (u(x, t) - u(x, t_0)) dx = \int_{t_0}^t \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt. \quad (2.3)$$

Ahora suponemos que en la población  $u$  hay difusión y quimiotaxis para proceder con el cálculo. Entonces podemos sustituir la expresión de  $\mathbf{J}$ ,

$$\int_{t_0}^t \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = d \int_{t_0}^t \int_{\omega} \Delta u dx dt \pm \int_{t_0}^t \int_{\omega} \nabla \cdot (u \chi(w) \nabla u) dx dt + \int_{t_0}^t \int_{\omega} \Gamma(u, v, w) dx dt, \quad (2.4)$$

$$\int_{t_0}^t \int_{\omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - d \Delta u \mp \nabla \cdot (u \chi(w) \nabla u) - \Gamma(u, v, w) \right) dx dt = 0. \quad (2.5)$$

Bajo la hipótesis de que todas las funciones en las integrales son continuas y como  $\omega$  y  $t$  son arbitrarios, tenemos como resultado que la función entre paréntesis ha de ser idénticamente nula. Llegamos a así a la siguiente ecuación en derivadas parciales,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \Delta u \pm \nabla \cdot (u \chi(w) \nabla u) + \Gamma(u, v, w). \quad (2.6)$$

A continuación veamos cómo en función del término quimiotáctico y de las funciones de creación/destrucción  $\Gamma(u, v, w)$  se modeliza cada uno de los sistemas que se estudian durante este trabajo.

## 2.1. Sistema con término de depredadores en estado de inactividad

En primer lugar, en el Capítulo 3, se estudia un sistema de tres variables  $u, v, w$  de interacción-difusión depredador-presa donde  $u$  es la densidad de la especie depredador,  $v$  la densidad de la especie presa y  $w$  es la densidad de depredadores en estado de inactividad, es decir, huevos o depredadores en hibernación. Este sistema, analizado en la referencia [8] por Kuwamura, no tiene quimiotaxis ya que la tercera ecuación no hace referencia a una sustancia química sino a depredadores inactivos, estos sin difusión, que afectan a la dinámica de la presa pero de un modo distinto, no a través de un término quimiotáctico.

En primer lugar Kuwamura trabaja con un sistema de dos ecuaciones donde no considera la densidad  $w$  de depredadores en estado de inactividad. En este caso el resto de términos incluidos en el factor  $\Gamma(u, v)$  son los siguientes.

Tenemos un término  $s(v)$  referido a la producción primaria de la presa y  $m(u)$  referida a la mortalidad del depredador.  $f(v)$  determina el consumo de presa por parte del depredador y un escalar  $k$  denota la fracción de biomasa de la presa que puede ser convertida en biomasa del depredador. Los escalares  $d_u$  y  $d_v$  son los coeficientes de difusión del depredador y la presa respectivamente, donde  $d_v \ll d_u$ , es decir, la difusión de la presa es suficientemente pequeña en comparación con la del depredador. Así pues este primer sistema resulta,

$$\begin{cases} u_t = d_u \Delta u + k f(v) u - m(u) u, \\ v_t = d_v \Delta v + s(v) - f(v) u. \end{cases} \quad (2.7)$$

Este sistema se extiende al sistema de tres ecuaciones incluyendo la densidad de depredadores en estado de inactividad  $w$  como sigue,

$$\begin{cases} u_t = d_u \Delta u + k\mu(v)f(v)u + \alpha(v)w - m(u)u, \\ v_t = d_v \Delta v + s(v) - f(v)u, \\ w_t = k\nu(v)f(v)u - \alpha(v)w - n(w)w, \end{cases} \quad (2.8)$$

donde  $\mu(v)$  y  $\nu(v)$  determinan la distribución de la energía de los depredadores entre los estados de actividad e inactividad tal que  $\mu(v) + \nu(v) = 1$ .  $\alpha(v)$  determina el tiempo medio de inactividad de los depredadores (tiempo de hibernación o tiempo de incubación de los huevos).  $n(w)$  representa la tasa de mortalidad de los depredadores en estado de inactividad.

El término de difusión en  $w$  se supone 0 porque los depredadores inactivos no tienen movilidad. Además suponemos que  $n(w) \ll m(u)$  porque la tasa de mortalidad de los depredadores inactivos es en general mucho más pequeña que la de los depredadores activos. Todas las funciones en el sistema son de clase  $\mathcal{C}^\infty$  y no negativas. En concreto  $f(v)$ ,  $\mu(v)$  son funciones crecientes en  $v$ ,  $m(u)$  y  $n(w)$  son funciones crecientes en  $u$  y  $w$  respectivamente y  $\alpha(v)$  es una función no decreciente en  $v$ . Un estudio más profundo sobre las implicaciones de estas hipótesis sobre nuestras funciones se realiza en la referencia [11].

## 2.2. Sistema de dos especies con quimiotaxis

En el Capítulo 4 se estudia un sistema de dos especies depredador-presa con término quimiotáctico en la ecuación de la presa pero sin una ecuación sobre la dinámica de una sustancia química que provoque dicha quimiotaxis, es decir un sistema de dos ecuaciones.

Este sistema se fundamenta en que una interacción básica binaria en un ecosistema complejo se basa en que tanto depredadores como presas se mueven arbitrariamente en el hábitat y ese movimiento arbitrario es modelizado mediante la difusión. En realidad lo que sucede no es solo que se muevan arbitrariamente, sino que la presa suele huir del depredador y/o el depredador suele perseguir a la presa. Surgen entonces dos opciones en los sistemas biológicos, incluir quimiotaxis en el término del depredador o hacerlo en el término de la presa.

En el primer caso, el término quimiotáctico en el depredador es de la forma  $-\chi \nabla \cdot (q(u) \nabla v)$ , señala la tendencia de la especie depredadora a moverse hacia la dirección en la que el gradiente de la distribución de la presa crece y se denomina *prey-taxis*. El caso en el que es el término de la presa el que lleva el término quimiotáctico entonces es de la forma  $+\xi \nabla \cdot (q(v) \nabla u)$ , señala la tendencia de la especie presa a moverse en la direcciones en la que el gradiente de concentración de depredadores decrece y se denomina *predator-taxis*. En ocasiones se incluye un tercer término con la concentración de sustancia química  $w(x, t)$  producida por el depredador o la presa que afecta al movimiento de la otra especie, por ejemplo en las referencias [9] y [12], sin embargo Shi, Wang y Wu no consideran este tercer término en los estudios en los que me baso para este trabajo.

En la referencia [14] se analiza un sistema con prey-taxis mientras que en [15] se estudia el caso con predator-taxis. Esta segunda referencia es la que se va a analizar con más profundidad en el Capítulo 4 y el sistema de ecuaciones con el trabaja es el siguiente.

Sea  $u$  la densidad de la especie depredadora y sea  $v$  la densidad de la presa.,

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + c\phi(u, v) - g(u), \\ v_t = \Delta v + \xi \nabla \cdot (q(v)\nabla u) + f(v) - \phi(u, v). \end{cases} \quad (2.9)$$

Además el sistema tiene condiciones de contorno de Neumann homogéneas y las siguientes condiciones iniciales,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.10)$$

Como hasta ahora en todos los casos, el hábitat de ambas especies es  $\Omega$ , un dominio acotado de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) con frontera regular  $\partial\Omega$ . El escalar  $d > 0$  es el coeficiente de difusión de la presa re-escalado para que el del depredador pueda ser  $d_u = 1$ . La función  $f(v)$  es la tasa de crecimiento de la presa,  $g(u)$  la tasa de mortalidad del depredador y la función  $\phi(u, v)$  mide la tasa de depredación de la presa por parte del depredador, escalado con un factor  $c > 0$  en la ecuación de depredador. El término  $+\xi \nabla \cdot (q(v)\nabla u)$  muestra la tendencia de la presa a moverse en la dirección opuesta a la que el gradiente de concentración de depredadores crece.

En las referencias [14] y [15] donde se estudia este sistema y su análogo con predator-taxis se hacen las siguientes hipótesis sobre las funciones del sistema basadas en las propiedades biológicas de los ecosistemas depredador-presa.

1. (H<sub>0</sub>) Las funciones  $g, q : [0, \infty) \times \overline{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f : [0, \infty) \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\phi : [0, \infty) \times [0, \infty) \times \overline{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$  son al menos de clase  $C^2$  con  $f(0, x) = 0$ ,  $g(0, x) = 0$ ,  $q(0, x) = 0$ ,  $\phi(u, 0, x) = 0$  y  $\phi(0, v, x) = 0$  para todo  $u, v \geq 0$ .
2. (H<sub>1</sub>)  $\exists B > 0$  tal que  $\phi(u, v, x) \leq Bu$  para todo  $u, v \geq 0$ ,  $x \in \times \overline{\Omega}$ .
3. (H<sub>2</sub>)  $\exists C > 0$  tal que  $q(v, x) \leq Cv$  para todo  $v \geq 0$ ,  $x \in \overline{\Omega}$ .
4. (H<sub>3</sub>)  $\exists D > 0$  tal que  $g(u, x) \geq Du$  para todo  $u \geq 0$ ,  $x \in \overline{\Omega}$ .
5. (H<sub>4</sub>)  $\exists E, F > 0$  tal que  $f(v, x) \leq Ev - Fv^2$  para todo  $v \geq 0$ ,  $x \in \overline{\Omega}$ .

### 2.3. Sistema con quimiotaxis y depredadores en estado de inactividad

Inspirado en los modelos de Kuwamura [8] y de Wu, Wang y Shi [15], [14], procedemos a formular un sistema con elementos de los dos anteriores para estudiar el comportamiento dinámico de este nuevo sistema y probar la existencia local y global de soluciones.

El modelo que se formula a continuación toma del artículo de Kuwamura el elemento de los depredadores en estado de inactividad (*dormant predators*) que generalmente representan huevos de la especie del depredador. Así pues tenemos como en [8] un depredador activo, una presa y un depredador inactivo. El elemento nuevo que introducimos es la quimiotaxis, un término que hace que la población de depredadores activos dirija su movimiento hacia las zonas en las que el gradiente de depredadores inactivos crece.



En la naturaleza los término quimiotácticos no solo se dan en las relaciones de depredador-presa en las que la presa supone el sustento alimenticio del depredador. También se dan relaciones denominadas *depredador-presa* en las que el *depredador* se mueve por instinto de protección o por atracción sexual en la dirección en la que el gradiente de concentración de la *presa* crece. Un ejemplo de esto se encuentra en la referencia [10], donde se explica cómo un término quimiotáctico modeliza perfectamente el movimiento de la polilla macho *Bombyx mori* hacia las zonas en las que el gradiente de concentración de polillas hembra crece debido a unas sustancias químicas denominadas *feromonas*.

Así pues finalmente el sistema queda como sigue. Sea  $u$  la densidad de depredadores activos,  $v$  la densidad de presas y  $w$  la densidad de depredadores inactivos,

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + k\mu(v)\phi(u, v) + \alpha(v)w - g(u) - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w), \\ v_t = \Delta v + f(v) - \phi(u, v), \\ w_t = k\nu(v)\phi(u, v) - \alpha(v)w - n(w)w, \end{cases} \quad (2.11)$$

Además el sistema tiene condiciones de contorno de Neumann homogéneas y las siguientes condiciones iniciales,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, \quad w(x, 0) = w_0(x) \geq 0 & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.12)$$

Todas las funciones que aparecen en este sistema verifican las condiciones expuestas en la sección Hipótesis del Capítulo 1.



## Capítulo 3

# Sistema con término de depredadores en estado de inactividad

En este capítulo se expone el estudio realizado por Kuwamura en [8] sobre la estabilidad de los puntos estacionarios del sistema depredador-presa con término de depredadores en estado de inactividad y sin quimiotaxis. Este artículo ha sido el punto de partida a la hora de plantear y proponer nuestro sistema. Presentamos los resultados principales aunque tras un estudio de la estabilidad de los puntos estacionarios el artículo se centra más en el estudio de las inestabilidades de Turing y de los patrones espacio-temporales. Para nosotros el objetivo principal es el estudio de la existencia global de soluciones únicas para, posteriormente, analizar con profundidad el comportamiento asintótico uniforme de las soluciones, nuestro siguiente paso en la investigación.

La idea del estudio de este sistema surge de la observación del efecto de los depredadores inactivos en los patrones espacio-temporales en los sistemas depredador-presa. Por ejemplo, el zooplankton produce huevos fértiles para sobrevivir durante periodos de condiciones de vida complicadas. Este factor altera la dinámica del sistema depredador-presa del zooplankton y el fitoplancton, estabilizando la población depredadora como se muestra en [7]. En general, tanto la difusión como la inactividad están consideradas maneras de escapar de periodos de condiciones medioambientales desfavorables y de ahí nace también la pregunta central de este capítulo: ¿qué efecto tiene la combinación de ambos factores en un sistema?

### 3.1. Análisis de la estabilidad para el caso $n(w) = 0$

En esta sección vamos a estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio estacionario para el sistema depredador-presa con término de depredadores en estado de inactividad (2.8) en el caso en que  $n(w) = 0$ , es decir, cuando no hay mortalidad de los depredadores en estado de inactividad. Esta simplificación no supone demasiado ya que que cuadra bastante bien con la hipótesis indicada en el capítulo anterior sobre que la mortalidad de los depredadores inactivos tenía que ser mucho menor que la de los depredadores en activo:  $m(w) \gg n(w)$ . El sistema a

estudiar resulta,

$$\begin{cases} u_t = d_u \Delta u + k\mu(v)f(v)u + \alpha(v)w - m(u)u, \\ v_t = d_v \Delta v + s(v) - f(v)u, \\ w_t = k\nu(v)f(v)u - \alpha(v)w, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde recordemos,  $u(\mathbf{x}, t)$  es la densidad de depredadores activos,  $v(\mathbf{x}, t)$  la densidad de presa y  $w(\mathbf{x}, t)$  la densidad de depredadores en estado de inactividad.

Para el estudio de la estabilidad de este sistema partimos del sistema (2.7) depredador-presa de dos ecuaciones, sin depredadores inactivos. En este sistema para determinar los puntos de equilibrio estacionario tenemos que eliminar el término de difusión y hacer que se anulen las derivadas temporales,  $u_t = 0$ ,  $v_t = 0$ . Es decir, un punto de equilibrio  $(\bar{u}, \bar{v})$  debe verificar la relación,

$$\begin{cases} 0 = kf(\bar{v})\bar{u} - m(\bar{u})\bar{u}, \\ 0 = s(\bar{v}) - f(\bar{v})\bar{u}. \end{cases} \quad (3.2)$$

En el sistema de tres ecuaciones, para hallar los puntos de equilibrio tenemos que hacer lo mismo, es decir, un punto de equilibrio  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  del sistema (3.1) debe verificar las relaciones,

$$\begin{cases} 0 = k\mu(\bar{v})f(\bar{v})\bar{u} + \alpha(\bar{v})\bar{w} - m(\bar{u})\bar{u}, \\ 0 = s(\bar{v}) - f(\bar{v})\bar{u}, \\ 0 = k\nu(\bar{v})f(\bar{v})\bar{u} - \alpha(\bar{v})\bar{w}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Vemos así que la segunda ecuación de (3.3) es la misma que la de (3.2). Además si sumamos la tercera y la primera ecuación de (3.3) y tenemos en cuenta que  $\mu(v) + \nu(v) = 1$ , llegamos a la relación:  $kf(\bar{v})\bar{u} - m(\bar{u})\bar{u}$ , que es exactamente la primera ecuación de (3.2). Así pues por esta observación podemos decir que el sistema con depredadores inactivos tiene los mismos puntos de equilibrio que el sistema sin depredadores inactivos, es decir,  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  es punto de equilibrio de (3.1) si y solo si  $(\bar{u}, \bar{v})$  lo es de (2.7). Además en ese caso se tiene que,

$$\bar{w} = \frac{k\nu(\bar{v})f(\bar{v})\bar{u}}{\alpha(\bar{v})}. \quad (3.4)$$

Sea  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  un punto de equilibrio de (3.1). Para estudiar la estabilidad del punto de equilibrio hay que linealizar el sistema alrededor de dicho punto y estudiar sus autovalores. El criterio de estabilidad es el siguiente: *Un punto de equilibrio es estable si todos los autovalores de la matriz de la linealización tienen parte real negativa.*

En general al linealizar el sistema  $\mathbf{u}_t = d\Delta\mathbf{u} + f(\mathbf{u})$  no se puede descartar ningún término, esto implica que sea necesario escribir el operador laplaciano  $\Delta$  utilizando sus autovalores, que son conocidos. En este caso Kuwamura no considera estos autovalores y linealiza la ecuación como  $\mathbf{u}_t = A\mathbf{u}$ , desechando los términos con derivadas espaciales. Esto se debe a que uno de los objetivos de su trabajo es el estudio de las inestabilidades de Turing, en las que yo no me centro, y para ello únicamente necesita los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias  $\mathbf{u}_t = f(\mathbf{u})$ .

Como ya hemos indicado, vamos a estudiar la estabilidad del sistema con término de depredadores en estado de inactividad (3.1) utilizando las propiedades del sistema sin dicho término, (2.7). Así pues procedemos a linealizar el sistema de dos ecuaciones alrededor del punto de equilibrio  $(\bar{u}, \bar{v})$ .

$$\begin{cases} u_t = kf(v)u - m(u)u, \\ v_t = s(v) - f(v)u. \end{cases} \quad (3.5)$$

La linealización la realizamos escribiendo las funciones  $u$  y  $v$  como pequeñas perturbaciones alrededor del punto de equilibrio. Sea  $\epsilon > 0$ , definimos las perturbaciones  $u_p = \bar{u} + \epsilon u$  y  $v_p = \bar{v} + \epsilon v$  y desarrollamos las ecuaciones despreciando los términos con  $\epsilon^2$ . Tras una manipulación directa dividimos entre  $\epsilon$  y obtenemos las ecuaciones,

$$\begin{aligned} u_t &= -\bar{u}m'(\bar{u})u + k\bar{u}f'(\bar{v})v, \\ v_t &= -f(\bar{v})u + [s'(\bar{v}) - \bar{u}f'(\bar{v})]v. \end{aligned} \quad (3.6)$$

De este modo, si  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , hemos obtenido la matriz de la linealización  $\mathbf{u}_t = A\mathbf{u}$  alrededor de  $(\bar{u}, \bar{v})$ , es decir

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{u}m'(\bar{u}) & k\bar{u}f'(\bar{v}) \\ -f(\bar{v}) & s'(\bar{v}) - \bar{u}f'(\bar{v}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

A continuación procedemos a linealizar el sistema que incluye el término de depredadores en estado de inactividad (3.1). El método es completamente análogo al caso del sistema (3.5) y definiendo  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , la matriz de la linealización  $\mathbf{u}_t = B\mathbf{u}$  alrededor del punto de equilibrio  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  resulta,

$$B = \begin{pmatrix} -k\nu(\bar{v})f(\bar{v}) - m'(\bar{u})\bar{u} & k\bar{u}\mu'(\bar{v})f(\bar{v}) + k\bar{u}\mu(\bar{v})f'(\bar{v}) + \alpha'(\bar{v})\bar{w} & \alpha(\bar{v}) \\ -f(\bar{v}) & s'(\bar{v}) - \bar{u}f'(\bar{v}) & 0 \\ k\nu(\bar{v})f(\bar{v}) & k\bar{u}\nu'(\bar{v})f(\bar{v}) + k\bar{u}\nu(\bar{v})f'(\bar{v}) - \alpha'(\bar{v})\bar{w} & -\alpha(\bar{v}) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Esta matriz  $B$  es la que nos va a determinar la estabilidad o inestabilidad del sistema depredador-presa con término de depredadores en estado de inactividad. Para ello vamos a utilizar la estabilidad de los puntos de equilibrio para el sistema sin depredadores inactivos, porque ya hemos visto que ambos sistemas comparten puntos de equilibrio.

La siguiente proposición de Kuwamura corresponde al Teorema 3.1 de [8]. Es el resultado central del capítulo y nos da una condición suficiente de estabilidad para la matriz  $B$ .

**Proposición 3.1.1** (Kuwamura). *Sea  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  un punto de equilibrio del sistema (3.1). Si la matriz  $A$  del sistema (2.7) es estable,  $\alpha(\bar{v})$  es suficientemente pequeño y se verifica que*

$$\mu'(\bar{v}) > \frac{s'(\bar{v})(m(\bar{u}) + m'(\bar{u})\bar{u})}{kf^2(\bar{v})\bar{u}}, \quad (3.9)$$

*entonces  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  es un punto de equilibrio estable.*

La demostración de este resultado utiliza el criterio de Routh-Hurwitz, que es directamente aplicable a la matriz  $B$  (3.8) partiendo de las condiciones de estabilidad para la matriz (3.7). Estas condiciones son, por el criterio de Routh-Hurwitz para matrices  $2 \times 2$ , equivalente a asegurar que el determinante de la matriz es positivo y la traza negativa.

Con este resultado Kuwamura cierra la parte de la estabilidad que nos interesa para nuestro sistema y pasa a estudiar las inestabilidades de Turing, que no incluimos por escaparse del tema central de este Trabajo Fin de Grado.



## Capítulo 4

# Sistema de dos especies con quimiotaxis

En este capítulo se exponen los estudios realizados por S. Wu, J. Shi, J. Wang y B. Wu sobre la existencia local y global de soluciones en sistemas de dos especies depredador presa con predator-taxis [15] y con prey-taxis [14].

La dinámica de los sistemas ecológicos se modeliza con ecuaciones de difusión, que implican el movimiento aleatorio de las especie (tanto depredador como presa) en el espacio. A veces sin embargo sucede que el movimiento no es tan arbitrario, algunos depredadores segregan hormonas que las presas son capaces de detectar para dirigir su movimiento en la dirección opuesta (predator-taxis) o las propias presas segregan sustancias químicas que los depredadores son capaces de reconocer para dirigir su movimiento hacia ellas (prey-taxis). Estas dos situaciones, considerando el caso más simple con únicamente dos términos, depredador y presa, son las que se estudian a lo largo de los artículos mencionados. Se demuestra que dichos sistemas tienen solución local y global bajo la imposición de ciertas condiciones para las funciones del sistema.

Consideramos un sistema depredador presa donde las presas son capaces de dirigir su movimiento en sentido opuesto a la dirección en la que el gradiente de concentración del depredador crece, este es el sistema con predator-taxis. La modelización de este sistema se explica con más detalle en el Capítulo 2 que finalmente resalta en el sistema,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c\phi(u, v) - g(u), \\ v_t = d\Delta v + \xi \nabla \cdot (q(v) \nabla u) + f(v) - \phi(u, v), \end{cases} \quad (4.1)$$

con condiciones de contorno Neumann homogéneas y las siguientes condiciones iniciales,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

Vemos aquí la estrecha relación entre (4.1) y el sistema considerado en el artículo de Kuwamura.

En la modelización el término  $f(v)$  da información sobre la tasa de crecimiento de la presa y

es típicamente negativa para valores grandes de  $v$ . Algunos ejemplos de la forma que tiene son,

$$\begin{aligned} \text{Logístico} \quad f(v) &= Dv \left(1 - \frac{v}{N}\right), \\ \text{Efecto Allee} \quad f(v) &= Dv \left(1 - \frac{v}{N}\right) \left(\frac{v}{G} - 1\right), \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde  $D > 0$  y  $N > G > 0$ . En su caso la tasa de mortalidad del depredador  $g(v)$  toma típicamente la forma,

$$\begin{aligned} \text{Lineal} \quad g(u) &= kv, \\ \text{Cuadrática} \quad g(u) &= ku + lu^2, \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde  $k, l > 0$ . La tasa de depredación, consumo de presa por parte del depredador,  $\phi(u, v)$  se suele poder escribir separando las dependencias con  $u$  y  $v$  tal que  $\phi(u, v) = u\Phi(v)$  donde  $\Phi(v)$  toma la forma,

$$\begin{aligned} \text{Tipo I} \quad \Phi(v) &= Bv, & \text{Tipo II} \quad \Phi(v) &= \frac{Bv}{h+v}, \\ \text{Tipo III} \quad \Phi(v) &= \frac{Bv^m}{h^m + v^m}, & \text{Tipo Ivlev} \quad \Phi(v) &= B(1 - e^{-hv}), \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde  $h, B > 0$ ,  $m > 1$ . Por último la función de sensibilidad a la quimiotaxis  $q(v)$  puede tomar la forma,

$$\begin{aligned} \text{Lineal} \quad q(v) &= v, \\ \text{Saturada} \quad q(v) &= \frac{v}{1 + \epsilon v^m}, \\ \text{Ricker} \quad q(v) &= ve^{-\epsilon v}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde  $\epsilon > 0$  y  $m \geq 1$ .

Para probar ciertas propiedades del sistema de ecuaciones que nos interesa no es esencial conocer la forma de las funciones que aquí se indican, es necesario para el estudio del comportamiento asintótico y para un estudio numérico. Basta con imponer unas condiciones menos restrictivas que incluyen todas las formas que se acaban de citar explícitamente. Estas hipótesis son las ya expuestas en la sección 2.2 del Capítulo 2 ( $H_0$ ), ( $H_1$ ), ( $H_3$ ) y ( $H_4$ ).

El resultado general de existencia global y acotación de soluciones para el sistema (4.1), que corresponde con el Teorema 1.1 de la referencia [15] es el siguiente.

**Teorema 4.0.1.** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) con frontera  $\partial\Omega$  suave. Sean  $d, c \geq 0$ ,  $\xi \geq 0$ ,  $f(v, x)$ ,  $g(u, x)$ ,  $q(v)$  y  $\phi(u, v, x)$  tales que satisfacen las hipótesis ( $H_0$ ), ( $H_1$ ), ( $H_3$ ) y ( $H_4$ ). Entonces para todo  $(u_0, v_0) \in (W^{1,p}(\Omega))^2$  donde  $p > n$ , tales que  $u_0(x) \geq 0$ ,  $v_0(x) \geq 0$  para  $x \in \bar{\Omega}$ , el sistema (4.1) tiene una única solución clásica global  $(u(x, t), v(x, t))$  que satisface*

$$(u, v) \in (C([0, \infty); W^{1,p}(\Omega)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, \infty)))^2.$$

*Además  $(u(x, t), v(x, t))$  está uniformemente acotado en  $\Omega \times (0, \infty)$ , es decir, existe una constante  $M(u_0, v_0) > 0$  tal que  $\|u(\cdot, t)\|_\infty + \|v(\cdot, t)\|_\infty \leq M(u_0, v_0)$ .*



## 4.1. Existencia local y global de soluciones

En primer lugar se estudia la existencia de soluciones clásicas localmente en el tiempo. Necesitamos que las hipótesis  $(H_0)$ ,  $(H_1)$ ,  $(H_3)$  y  $(H_4)$  se satisfagan y que las condiciones iniciales verifiquen que  $(u_0, v_0) \in (W^{1,p}(\Omega))^2$  para  $p > n$  con  $u_0, v_0 \geq 0$ . En estas condiciones se enuncia el siguiente resultado de existencia local de soluciones que corresponde al Lema 2.1 en [15].

**Proposición 4.1.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  con frontera regular y las condiciones iniciales  $(u_0, v_0) \in (W^{1,p}(\Omega))^2$  para  $p > n$  con  $u_0, v_0 \geq 0$ . Si las hipótesis  $(H_0)$ ,  $(H_1)$ ,  $(H_3)$  y  $(H_4)$  se satisfacen, entonces:*

1. *Existe una constante positiva  $T_{max}$  llamado tiempo maximal de existencia tal que el sistema (4.1) tiene una única solución clásica no negativa  $(u(x, t), v(x, t)) \in (C([0, T_{max}); W^{1,p}(\Omega)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T_{max})))^2$ .*
2. *La masa total de  $u(x, t)$  y  $v(x, t)$  satisface*

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx \leq C_0, \quad \int_{\Omega} v(x, t) dx \leq C_1 \quad \forall t \in (0, T_{max}), \quad (4.7)$$

donde

$$C_0 = \max \left\{ \frac{c(E + D)}{D} C_1, \int_{\Omega} (u_0 + cv_0) dx \right\}, \quad C_1 = \max \left\{ \|v_0\|_1, \frac{E|\Omega|}{F} \right\}. \quad (4.8)$$

3. *Existe una constante  $Q > 0$  tal que  $u$  y  $v$  satisfacen*

$$0 \leq u(x, t) \leq Q, \quad v(x, t) \geq 0, \quad 0 \leq t < T_{max}. \quad (4.9)$$

4. *Si para cada  $T > 0$  existe una constante  $M_0(T)$  que depende de  $T$  y de  $\|(u_0, v_0)\|_{1,p}$  tal que*

$$\|(u(t), v(t))\|_{\infty} \leq M_0(T), \quad 0 < T < \min \{T, T_{max}\}, \quad (4.10)$$

entonces  $T_{max} = +\infty$ .

Para demostrar este resultado se utiliza la teoría abstracta para sistemas cuasilineales parabólicos como teoremas de Amann [2] de existencia de soluciones locales, el Teorema de Alikakos (Capítulo 1) y los principios de comparación y del máximo para ecuaciones parabólicas. No se enuncian aquí estos resultados porque nuestra intención es obtener resultados para el sistema utilizando métodos clásicos conocidos.

Para estudiar la existencia global y la acotación de soluciones del sistema (4.1). Utilizando la existencia local de soluciones primero se establece una cota uniforme para  $v(x, t)$  en  $L^k(\Omega)$  para todo  $k \in [2, \infty)$  que permite probar la existencia de una cota en  $L^\infty(\Omega)$  utilizando el método de Alikakos. Los resultados son los siguientes,

**Proposición 4.1.2.** *Sea  $(u, v)$  una solución de (4). Si las hipótesis  $(H_0)$ ,  $(H_1)$ ,  $(H_3)$  y  $(H_4)$  se satisfacen, entonces para todo  $k \geq 2$  existe una constante positiva  $G > 0$  tal que,*

$$\|v(\cdot, t)\|_k \leq G, \quad \text{para } t \in (0, T_{max}). \quad (4.11)$$

**Proposición 4.1.3.** *Sea  $(u, v)$  una solución de (4). Si las hipótesis  $(H_0)$ ,  $(H_1)$ ,  $(H_3)$  y  $(H_4)$  se satisfacen, entonces existe una constante positiva  $M$  tal que,*

$$\|v(\cdot, t)\|_{\infty} \leq M \quad \text{para todo } t \in (0, T_{max}). \quad (4.12)$$

Como en la sección anterior, estos resultados son clásicos en sistemas parabólico-parabólico y los utilizamos en el capítulo siguiente en el que se estudia la existencia global de soluciones para el sistema con depredadores inactivos y quimiotaxis. Además todos ellos juntos dan finalmente el resultado enunciado en el Teorema 4.0.1

## 4.2. Comportamiento asintótico para el caso $g(u) = ku$

La segunda parte del artículo de Wu, Wang y Shi se centra en estudiar la estabilidad de los puntos estacionarios del sistema (4.1) así como el comportamiento asintótico de la solución bajo perturbaciones infinitesimales en estos puntos estacionarios. Para ello es necesario considerar casos particulares e imponer algunas condiciones más específicas para las funciones  $f$ ,  $g$ ,  $\phi$  y  $q$ . En concreto se asume que las funciones son independientes de  $x$  y que además toman la siguiente forma,

$$f(v, x) \equiv f(v), \quad g(u, x) \equiv uk(u), \quad \phi(u, v, x) \equiv u\Phi(v), \quad q(v) \equiv v. \quad (4.13)$$

Así pues el sistema (4.1) se puede escribir del siguiente modo.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + cu\Phi(v) - uk(u), \\ v_t = d\Delta v + \xi \nabla \cdot (v \nabla u) + f(v) - u\Phi(v), \end{cases} \quad (4.14)$$

con condiciones de contorno Neumann homogéneas y las siguientes condiciones iniciales,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.15)$$

Además es necesario incluir condiciones adicionales que las funciones del sistema (4.14) deben satisfacer. Estas condiciones son clásicas en modelos de sistemas ecológicos y tienen un sentido biológico. Por ejemplo en este caso  $\Phi(v)$  representa la respuesta funcional del depredador con respecto a la población de la presa o  $k(u)$  representa la tasa de mortalidad del depredador. Las hipótesis nuevas a considerar entonces son las siguientes.

1. (H<sub>5</sub>) La función  $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es continua y diferenciable. Además verifica que  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi'(v) > 0$  para todo  $v \geq 0$  y es tal que existe  $N_* > 0$  tal que se cumple que

$$v^2 \Phi'(v) \geq N_* \Phi(v)^2 \quad \text{para todo } v \geq 0.$$

2. (H<sub>6</sub>) Definimos la función

$$\psi(v) = \frac{f(v)}{\Phi(v)}.$$

Entonces  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es continua y diferenciable. Además verifica que  $\psi(0) > 0$ , y existe una constante  $N$  tal que cuando  $v \neq N$  para  $v > 0$ ,  $\psi(v)(v - N) < 0$  y  $\psi(N) = 0$ . Existe otra constante  $M \in (0, N)$  tal que  $\psi'(v) > 0$  cuando  $v \in [0, M)$ , y  $\psi'(v) < 0$  cuando  $v \in [M, N)$ .

3. (H<sub>7</sub>)  $k(u) \equiv k > 0$ , donde  $k$  es constante. Además existe  $\lambda > 0$  tal que  $\Phi(\lambda) = k/c$ .

En este contexto procedemos a enunciar entonces el resultado principal sobre comportamiento asintótico del sistema (4.14) que corresponde con el Teorema 1.3 de la referencia [15].

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $d, c > 0$ ,  $\xi \geq 0$  y  $f(v)$ ,  $g(u) = uk(u)$ ,  $q(v)$  y  $\Phi(v)$  tales que satisfacen las condiciones  $(H_0)$ - $(H_7)$ . Entonces:*

1.  $(0, 0)$  es un estado estacionario constante inestable de (4.14).  $(0, N)$  es un estado estacionario localmente asintóticamente estable de (4.14) cuando  $\lambda > N$  y es inestable cuando  $0 < \lambda < N$ .  $(\psi(\lambda), \lambda)$  es un estado estacionario localmente asintóticamente estable cuando  $M < \lambda < N$  e inestable cuando  $0 < \lambda < M$ .
2. Si además de las hipótesis enunciadas se verifica que existe  $M_* \in (M, N)$  tal que  $\psi(M_*) = \psi(0)$ , y para  $\lambda \in (M_*, N]$  se verifica que

$$0 \leq \xi < \sqrt{\frac{4d\psi(\lambda)}{cN_*\Phi(\lambda)N^2}},$$

entonces  $(\psi(\lambda), \lambda)$  es globalmente asintóticamente estable para el sistema (4.14) para todo  $u_0, v_0 \geq 0$  con  $v_0 \not\equiv 0$ .

3. Cuando  $0 < \lambda < M$ , el sistema (4.14) tiene órbitas periódicas positivas y espacialmente homogéneas.

Para la demostración de este resultado primero se averigua cuales son los puntos estacionarios, a continuación se linealizan las ecuaciones del sistema alrededor de dichos puntos y se estudia su estabilidad local utilizando el Criterio de Routh-Hurwitz sobre el polinomio característico de la matriz de la linealización. Por último para conocer el comportamiento asintótico y la estabilidad global de los puntos estacionarios se define un funcional de Lyapunov clásico para sistemas parabólico-parabólico,

$$E(u, v) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left( u - \psi(\lambda) - \psi(\lambda) \ln \frac{u}{\psi(\lambda)} \right) + \int_{\Omega} \left( \int_{\lambda}^v \frac{\Phi(s) - \Phi(\lambda)}{\Phi(s)} ds \right), \quad (4.16)$$

y se obtiene el resultado enunciado en el Teorema 4.2.1.

Cabe remarcar como consecuencia de este resultado que si  $\xi = 0$ , el sistema (4.14) con la hipótesis  $(H_7)$  es el sistema clásico depredador-presa con difusión de Rosenzweig-MacArthur. El Teorema 4.2.1 muestra entonces que al añadir la quimiotaxis repulsiva en el término de la presa la estabilidad local en los estados estacionarios constantes  $(0, 0)$ ,  $(0, N)$  y  $(\psi(\lambda), \lambda)$  no cambia. Además los resultados de estabilidad local en el Teorema 4.2.1 se satisfacen para todo coeficiente de difusión  $d > 0$  y coeficiente de quimiotaxis  $\xi \geq 0$ , de modo que ni la difusión ni la quimiotaxis inducen inestabilidades en el sistema (4.14) cuando  $k(u) \equiv k$ .



## Capítulo 5

# Sistema con quimiotaxis y término de depredadores inactivos

En este capítulo se estudia el sistema central de este Trabajo Fin de Grado. Inspirados en las investigaciones de Kuwamura [8] y de Wu, Wang y Shi [15], [14] planteamos un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que toma del sistema de Kuwamura el término de depredadores en estado de inactividad pero al que se le añade un término quimiotáctico en los depredadores activos: estos van a tener una tendencia a moverse hacia los puntos en los que el gradiente de concentración de depredadores inactivos, huevos de depredador, crece. Así pues el sistema entonces resulta en una combinación de dos relaciones depredador-presa: una entre los depredadores activos  $u$  y la presa  $v$  y otra entre los depredadores activos y los depredadores inactivos  $w$ , esta con quimiotaxis. El sistema resulta entonces,

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + k\mu(v)\phi(u, v) + \alpha(v)w - g(u) - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w), \\ v_t = \Delta v + f(v) - \phi(u, v), \\ w_t = k\nu(v)\phi(u, v) - \alpha(v)w - n(w)w, \end{cases} \quad (5.1)$$

donde  $\mu(v) + \nu(v) = 1$  para todo  $v$ .

Además el sistema tiene condiciones de contorno de Neumann homogéneas y las siguientes condiciones iniciales,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & x \in \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x) \geq 0 & x \in \Omega, \\ w(x, 0) = w_0(x) \geq 0 & x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.2)$$

Cade remarcar entonces que si a le quitamos el término quimiotáctico, es decir, hacemos  $\chi = 0$ , tenemos como resultado el sistema estudiado por Kuwamura en [8] (Capítulo 3) de modo que así conocemos sus puntos estacionarios y la condiciones de estabilidad de dichos puntos mientras que si lo que hacemos cero es el término de los depredadores inactivos, es decir,  $w = 0$  y  $\nu = 0$ , y consideramos la quimiotaxis sobre la presa  $v$  en vez de sobre  $w$  entonces lo que obtenemos es el sistema estudiado por Wu, Wang y Shi en [14] (Capítulo 4), sistema que también hemos presentado cómo se comporta de modo que podemos trazar paralelismos. Esta

configuración nos es favorable en el sentido en que con los resultados que obtengamos para el sistema nuevo, podremos así comprobar si tienen sentido al compararlos con los casos extremos de Wu, Wang y Shi y de Kuwamura.

A lo largo del capítulo nos vamos a centrar en demostrar la existencia global uniforme de soluciones de este sistema utilizando técnicas clásicas para sistemas del tipo parabólico-parabólico-ordinario. Para ello imponemos sobre las funciones del sistema unas hipótesis iniciales con sentido biológico que nos aseguran la existencia en los casos extremos en los que el sistema coincide con (4.1) y (2.8). Recordemos las hipótesis que necesitamos a continuación imponer sobre las funciones del sistema (5.1) presentadas en el Capítulo 5.

- (h<sub>0</sub>) Las funciones  $g, n : [0, \infty) \times \bar{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f : [0, \infty) \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi : [0, \infty) \times [0, \infty) \times \bar{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$  y  $\mu, \nu : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  son al menos de clase  $C^2$  y verifican  $f(0, x) = 0$ ,  $g(0, x) = 0$ ,  $\alpha(0) = 0$ ,  $\phi(u, 0, x) = 0$  y  $\phi(0, v, x) = 0$  para todo  $u, v \geq 0$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ .
- (h<sub>1</sub>)  $\exists B > 0$  tal que  $\phi(u, v, x) \leq Bu$  para todo  $u, v \geq 0$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ .
- (h<sub>2</sub>) La función respuesta de la quimiotaxis  $\chi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  verifica  $\chi \in C^{1+\theta} \cap L^1[0, \infty)$  para  $\theta > 0$ .
- (h<sub>3</sub>)  $\exists D > 0$  tal que  $g(u, x) \geq Du$  para todo  $u \geq 0$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $n(w) > D$  para todo  $w \geq 0$ , y que verifica que  $D > kB$ .
- (h<sub>4</sub>)  $\exists E, F > 0$  tal que  $f(v, x) \leq Ev - Fv^2$  para todo  $v \geq 0$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ .
- (h<sub>5</sub>) Las derivadas de la función  $h_3$  de (13) con respecto a  $u$  y  $v$  verifican que,

$$\left. \frac{\partial h_3}{\partial u} \right|_{(u,v,w)} \geq 0, \quad \left. \frac{\partial h_3}{\partial v} \right|_{(0,v,w)} \geq 0, \quad (5.3)$$

para todo valor de  $u, v$  y  $w$ .

- (h<sub>6</sub>)  $\exists M > 0$  tal que  $h_3(0, 0, w) \geq -M/\chi(w)$ , para todo valor de  $w$ . Además en relación a las constantes de las hipótesis (h<sub>1</sub>) y (h<sub>3</sub>),  $M$  verifica que  $M < D - kB$ .

Así pues el resultado principal que obtenemos para el sistema (5.1) sobre existencia global de soluciones es el siguiente.

**Teorema 5.0.1.** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) con frontera  $\partial\Omega$  suave. Sean  $d, k \geq 0$ ,  $\chi(w)$ ,  $f(v, x)$ ,  $g(u, x)$  y  $\phi(u, v, x)$  tales que satisfacen las hipótesis (h<sub>0</sub>), (h<sub>1</sub>), (h<sub>3</sub>) y (h<sub>4</sub>). Entonces para todo  $(u_0, v_0, w_0) \in (W^{1,p}(\Omega))^3$ , tales que  $u_0(x) \geq 0$ ,  $v_0(x) \geq 0$ ,  $w_0(x) \geq 0$  para  $x \in \bar{\Omega}$ , el sistema (5.1) tiene una única solución clásica global  $(u(x, t), v(x, t), w(x, t))$  que satisfice*

$$(u, v, w) \in (C([0, \infty); W^{1,p}(\Omega)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, \infty)))^3.$$

*Además  $(u(x, t), v(x, t), w(x, t))$  está uniformemente acotado en  $\Omega \times (0, \infty)$ , es decir, existen constantes  $C_1(u_0, v_0, w_0)$ ,  $C_2(u_0, v_0, w_0)$ ,  $C_3(u_0, v_0, w_0) > 0$  tales que  $\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq C_1$ ,  $\|v(\cdot, t)\|_\infty \leq C_2$  y  $\|w(\cdot, t)\|_\infty \leq C_3$ .*

Esta es solo la primera parte de un trabajo extenso que seguiremos desarrollando.

## 5.1. Existencia local de soluciones

Para demostrar la existencia global de las soluciones obtenemos la existencia local con argumentos clásicos de ecuaciones en derivadas parciales y después encontramos cotas uniformes para concluir la demostración. Para demostrar esta la existencia local así como acotaciones en  $L^1$  y  $L^\infty$  necesitamos utilizar, entre otros, dos resultados de Amann [2] y [3], el Lema de Comparación, el Principio del Máximo de Hopf y el Teorema de Alikakos [1] expuesto en el Capítulo 1 de Resultados Previos. El resultado de existencia local es el siguiente.

**Teorema 5.1.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  con frontera regular y las condiciones iniciales  $(u_0, v_0, w_0) \in (W^{1,p}(\Omega))^3$  para  $p > n$  con  $u_0, v_0 \geq 0$ . Bajo las hipótesis  $(h_0)$ - $(h_4)$  las siguientes situaciones se verifican.*

1. *Existe una constante positiva  $T_{max}$  tal que el sistema (5.1) tiene una única solución clásica no negativa  $(u(x, t), v(x, t), w(x, t)) \in (C([0, T_{max}]; W^{1,p}(\Omega)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T_{max})))^3$ .*
2. *La masa total de  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  y  $w(x, t)$  satisface*

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx \leq C_0, \quad \int_{\Omega} v(x, t) dx \leq C_1, \quad \int_{\Omega} w(x, t) dx \leq C_0 \quad \forall t \in (0, T_{max}), \quad (5.4)$$

donde

$$C_0 = \max \left\{ \|u_0 + w_0 + kv_0\|_1, \frac{k(E+D)C_1}{D} \right\}, \quad C_1 = \max \left\{ \|v_0\|_1, \frac{E}{F}|\Omega| \right\} \quad (5.5)$$

3. *Existe una constante  $Q > 0$  tal que  $u$ ,  $w$  y  $v$  satisfacen*

$$0 \leq u(x, t), \quad 0 \leq w(x, t), \quad 0 \leq v(x, t) \leq Q, \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq t < T_{max}. \quad (5.6)$$

4. *Si para cada  $T > 0$  existe una constante  $M_0(T)$  que depende de  $T$  y de  $\|(u_0, v_0, w_0)\|_{1,p}$  tal que*

$$\|(u(t), v(t), w(t))\|_{\infty} \leq M_0(T), \quad 0 < T < \min \{T, T_{max}\}, \quad (5.7)$$

entonces  $T_{max} = +\infty$ .

Para demostrar el primer punto del Teorema necesitamos enunciar un resultado de Amann [2] que nos da la existencia de soluciones locales de manera bastante directa para sistemas de ecuaciones de evolución de reacción-difusión como el que se presenta en nuestro problema.

**Lema 5.1.2** (Amann). *Sea  $p \in (1, \infty)$ ,  $N$  el número de ecuaciones escalares en el sistema de ecuaciones y  $V$  el conjunto de funciones pertenecientes a  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$  con condiciones homogéneas de Neumann en  $\partial\Omega$ . Sea  $\mathcal{A}(u)$  una matriz  $N \times N$  que incluye explícitamente las segundas derivadas espaciales de  $u$  de la forma*

$$\mathcal{A}(u)u = -\frac{\partial}{\partial x^j} \left( a_{jk} \frac{\partial u}{\partial x^k} \right) \quad (5.8)$$

Análogamente sea  $\mathcal{B}(u)$  la misma matriz que  $\mathcal{A}$  pero evaluada en la frontera de  $\Omega$ . Dada una función  $u_0 \in V$ , consideramos el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(u)u = f(\cdot, u, \partial u) & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \mathcal{B}(u)u = 0, & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0, & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (5.9)$$

Entonces existe una solución maximal única,

$$u(\cdot, u_0) \in C([0, t(u_0)), V) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, t(u_0)), \mathbb{R}^N), \quad (5.10)$$

donde  $0 < t(u_0) \leq \infty$ .

*Demostración.* (Teorema 5.1.1) **Paso 1.** Conociendo este resultado podemos definir  $\omega = (u, v, w)$  de modo que el sistema (5.1) se puede escribir en forma matricial como sigue,

$$\begin{cases} \omega_t = \nabla \cdot (a(\omega) \nabla \omega) + \Phi(\omega) & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ \omega(x, 0) = (u_0(x), v_0(x), w_0(x)), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (5.11)$$

donde

$$a(\omega) = \begin{pmatrix} d & 0 & -u\chi(w) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

$$\Phi(\omega, \partial\omega) = \begin{pmatrix} k\mu(v)\phi(u, v) + \alpha(v)w - g(u) \\ f(v) - \phi(u, v) \\ k\nu(v)\phi(u, v) - \alpha(v)w - n(w)w \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Expresar de este modo nuestro sistema nos permite hacer la asociación  $\mathcal{A}(\omega)\omega = -\nabla \cdot (a(\omega)\nabla \omega)$  y  $f(\cdot, \omega, \partial\omega) = \Phi(\omega, \partial\omega)$ . Esto directamente nos permite aplicar el Lema 5.1.2 ya que se verifican todas las hipótesis necesarias, y por tanto se concluye que, con  $T_{\max} = t(\omega_0)$ , existe una solución maximal única,

$$\omega(x, t) \in (C([0, T_{\max}), W^{1,p}(\Omega)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, T_{\max})))^3. \quad (5.14)$$

**Paso 2.** A continuación pasamos a estudiar el punto 2 que nos habla sobre la acotación de las soluciones en  $L^1$ . Para resolver este punto necesitamos hacer uso de un lema de acotación de soluciones de ecuaciones diferenciales, que es consecuencia directa del Lema de Comparación.

**Lema 5.1.3.** Sea  $y(t)$  una función no negativa que satisface la relación

$$\frac{dy}{dt} = k_0 + ay - by^q, \quad (5.15)$$

con condiciones iniciales  $y(0) = y_0$ , donde  $k_0, a, b \geq 0$  y  $q > 1$ . Entonces, si  $Y$  es el máximo valor de  $y$  para el que  $f(y) = k_0 + ay - by^q = 0$ , existe una constante positiva  $K = \max\{y_0, Y\}$  de modo que,

$$y(t) \leq K. \quad (5.16)$$

Si  $q = 1$  entonces el Lema aplica del mismo modo pero con  $a = 0$ .

Comenzamos por la acotación para  $v(x, t)$ . Integramos en todo el dominio  $\Omega$  la segunda ecuación de (5.1) ya que podemos utilizar las condiciones de contorno homogéneas de Neumann para que la integral del laplaciano desaparezca, también utilizamos que  $\phi(u, v) \geq 0$  y la hipótesis (h<sub>4</sub>) para escribir,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v = \int_{\Omega} f(v) - \int_{\Omega} \phi(u, v) \leq \int_{\Omega} (Ev - Fv^2). \quad (5.17)$$



Ahora utilizamos la desigualdad de Hölder sobre  $v(x, t)$  y la función  $\text{id}(x, t) \equiv 1$  para los conjugados  $p = q = 1/2$  de modo que obtenemos la relación,

$$\int_{\Omega} (v \cdot 1) \leq \left( \int_{\Omega} v^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} 1^2 \right)^{1/2} = \left( \int_{\Omega} v^2 \right)^{1/2} |\Omega|^{1/2} \Leftrightarrow \int_{\Omega} v^2 \geq \frac{1}{|\Omega|} \left( \int_{\Omega} v \right)^2. \quad (5.18)$$

Entonces resulta la relación,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \leq E \int_{\Omega} v - \frac{F}{|\Omega|} \left( \int_{\Omega} v \right)^2. \quad (5.19)$$

En este punto utilizamos el Lema 5.1.3 donde  $k_0 = 0$ ,  $a = E > 0$  y  $b = F/|\Omega| > 0$ , lo que implica que

$$\int_{\Omega} v \leq C_1 = \max \left\{ \|v_0\|_1, \frac{E}{F} |\Omega| \right\}. \quad (5.20)$$

Para hallar la acotación de  $u$  y  $w$  consideramos la combinación lineal  $u + w + kv$ . Sumamos la primera, la tercera y la segunda ecuación multiplicada por  $k$  de (5.1), de modo que obtenemos la expresión,

$$u_t + w_t + kv_t = d\Delta u + k\Delta v - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w) - g(u) + kf(v) - n(w)w. \quad (5.21)$$

Integramos esta expresión en todo el dominio  $\Omega$  y utilizamos las condiciones de contorno homogéneas de Neumann para eliminar los términos con gradiente y laplaciano.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u + w + kv) = \int_{\Omega} (kf(v) - g(u) - n(w)w), \quad (5.22)$$

ahora utilizamos las hipótesis (h<sub>3</sub>) y (h<sub>4</sub>), y que  $v^2 \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u + w + kv) &\leq k \int_{\Omega} (Ev - Fv^2) - D \int_{\Omega} u - \int_{\Omega} n(w)w \\ &\leq kE \int_{\Omega} v - D \int_{\Omega} u - \int_{\Omega} n(w)w \\ &= -D \int_{\Omega} (u + w + kv) + k(E + D) \int_{\Omega} v + \int_{\Omega} (D - n(w))w, \end{aligned} \quad (5.23)$$

por (h<sub>3</sub>), como  $n(w) \geq D$ , el último término es negativo y por lo tanto podemos escribir

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u + w + kv) \leq -D \int_{\Omega} (u + w + kv) + k(E + D)C_1. \quad (5.24)$$

En este punto ya podemos utilizar el Lema 5.1.3 de modo que en general llegamos a que

$$\int_{\Omega} (u + w + kv) \leq C_0 = \max \left\{ \|u_0 + w_0 + kv_0\|_1, \frac{k(E + D)C_1}{D} \right\}, \quad (5.25)$$

y en particular,

$$\int_{\Omega} u \leq C_0, \quad \int_{\Omega} w \leq C_0. \quad (5.26)$$

**Paso 3.** Para demostrar el tercer punto del Teorema comenzamos estudiando la positividad de la función  $w$ . Para ello re-escribimos la ecuación de  $w$  como en (13) y aplicamos el Teorema del Valor Medio, de modo que existen  $\xi_1 \geq 0$  y  $\xi_2 \geq 0$  tales que verifican,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = h_3(u, v, w) = \frac{\partial h_3}{\partial u} \Big|_{(\xi_1, v, w)} u + \frac{\partial h_3}{\partial v} \Big|_{(0, \xi_2, w)} v + h_3(0, 0, w). \quad (5.27)$$

Por la hipótesis (h<sub>5</sub>) obtenemos que  $h_3(u, v, w) \geq h_3(0, 0, w)$  para todo valor de  $u, v$  y  $w$ . Además vemos que la hipótesis tiene sentido puesto que como  $h_3(u, v, w) = k\nu(v)\phi(u, v) + \alpha(v)w - n(w)w$ , al eliminar  $u$  y  $v$  resulta que  $h_3(0, 0, w) = -n(w)w$  que siempre será menor o igual que 0 mientras que  $h_3(u, v, w)$  tiene términos positivos que eventualmente hacen que  $h_3$  pueda ser positiva.

Así pues obtenemos la relación,

$$\frac{\partial w}{\partial t} \geq h_3(0, 0, w) = -n(w)w. \quad (5.28)$$

Con la condición inicial  $w_0 = w(t=0) \geq 0$  se observa que para valores pequeños de  $t$  el valor de la derivada  $w_t$  puede ser negativo ya que  $n(w) > 0$ . No obstante si existe un tiempo  $\tau \in [0, T_{max})$  tal que  $w(\tau) = 0$ , en dicho punto se verifica que  $w_t(t = \tau) \geq 0$  y es imposible que exista  $\epsilon > 0$  tal que  $w(t = \tau + \epsilon) < 0$  ya que si se da el caso entonces es necesario que exista  $t \in (\tau, \tau + \epsilon)$  tal que  $w_t(t) < 0$  y  $w(t) < 0$ . Esto es imposible puesto que  $n(w) > 0$  para todo  $w$  y de este modo se obtiene que  $w \geq 0$  en todo punto.

A continuación para probar la positividad de  $u$  y  $v$  necesitamos definir la función,

$$F(w) = \exp \left\{ \int_0^w \chi(s) ds \right\}, \quad (5.29)$$

donde  $w$  es la variable correspondiente a la densidad de depredadores inactivos y  $\chi \in C^{1+\theta} \cap L^1[0, \infty)$ , con  $\theta > 0$ , la función responsable de la quimiotaxis. La función  $F$  cumple que  $F'(w) = \chi(w)F(w)$ .

Con esta función realizamos un cambio de variable para la función  $u$ ,

$$u = F(w)\tilde{u}. \quad (5.30)$$

Utilizando las propiedades de la función  $F$  y definiendo la tercera ecuación de (5.1) como  $w_t = h_3(u, v, w)$  podemos escribir,

$$\begin{cases} u_t = \tilde{u}_t F(w) + \tilde{u} \chi(w) F(w) h_3(u, v, w), \\ \nabla u = F(w) \nabla \tilde{u} + \tilde{u} \chi(w) F(w) \nabla w, \\ \Delta u = F(w) \Delta \tilde{u} + \chi(w) F(w) \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w + \nabla \cdot (\tilde{u} \chi(w) F(w) \nabla w). \end{cases} \quad (5.31)$$

Vamos a utilizar estas expresiones para reescribir la ecuación de  $u$  en el sistema (5.1) con el cambio de variable. La ecuación tiene la siguiente forma,

$$u_t = d\Delta u + k\mu(v)\phi(u, v) + \alpha(v)w - g(u) - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w), \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t F(w) + \tilde{u} \chi(w) F(w) h &= F(w) \Delta \tilde{u} + \chi(w) F(w) \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w + \nabla \cdot (\tilde{u} \chi(w) F(w) \nabla w) \\ &\quad + k\mu(v)\phi(F(w)\tilde{u}, v) + \alpha(v)w - g(F(w)\tilde{u}) - \nabla \cdot (\tilde{u} \chi(w) F(w) \nabla w) \\ &= F(w) \Delta \tilde{u} + \chi(w) F(w) \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w + k\mu(v)\phi(F(w)\tilde{u}, v) \\ &\quad + \alpha(v)w - g(F(w)\tilde{u}), \end{aligned} \quad (5.33)$$

es decir, la expresión para la nueva variable resulta

$$\tilde{u}_t = \Delta \tilde{u} + \chi(w) \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w - \tilde{u} \chi(w) h + G(\tilde{u}, v, w), \quad (5.34)$$

donde,

$$G(\tilde{u}, v, w) = F(w)^{-1} [k\mu(v)\phi(F(w)\tilde{u}, v) + \alpha(v)w - g(F(w)\tilde{u})] \quad (5.35)$$

Así pues podemos reescribir el sistema (5.1) como,

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = \Delta \tilde{u} + \chi(w) \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w - \tilde{u} \chi(w) h + G(\tilde{u}, v, w), \\ v_t = \tilde{d} \Delta v + f(v) - \phi(F(w)\tilde{u}, v), \\ w_t = k\nu(v)\phi(F(w)\tilde{u}, v) - \alpha(v)w - n(w)w, \end{cases} \quad (5.36)$$

con las condiciones iniciales,

$$\tilde{u}(x, 0) = \frac{u_0(x)}{F(w_0(x))}, \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad (5.37)$$

y las condiciones de contorno de Neumann homogéneas,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (5.38)$$

Cabe mencionar que el coeficiente  $\tilde{d}$  de difusión se incluye en ese sistema en la ecuación de  $v$  en lugar de en la de  $u$  para simplificar los cálculos, ya que el cambio de variable se realiza para  $u$ . Esto está permitido puesto que los coeficientes de difusión  $d_u$  y  $d_v$  tienen un valor relativo entre ellos, es decir podemos normalizar uno, por ejemplo  $d_v = 1$  de modo que el otro cambia a  $d_u = d$  (que es lo que hemos hecho en el apartado de modelización del sistema). Para este apartado es más sencillo permitir que  $d_u = 1$  y  $d_v = \tilde{d}$ , pero son situaciones totalmente equivalentes.

Reescribiendo la ecuación para  $v$  para que tome la forma en la que se puede aplicar el Principio del Máximo vemos que  $\tilde{d} \Delta v - v_t = -f(v) + \phi(F(w)\tilde{u}, v)$ . Utilizando las hipótesis (h<sub>1</sub>) y (h<sub>4</sub>) vemos que  $-f(v)$  crece con  $v^2$  y  $\phi(u, v)$  crece con  $u$ , de modo que  $-f(v) + \phi(F(w)\tilde{u}, v) \geq 0$ . Como el resto de hipótesis sobre los coeficientes que multiplican a gradientes y laplacianos se cumplen y en la frontera de  $\Omega \times (0, T_{\max})$  tenemos que  $v_0(x) \geq 0$ , aplicando el Corolario 1.1.7 al Principio del Máximo para ecuaciones parabólicas obtenemos que  $v(x, t) \geq 0$  para todo  $x \in \Omega$  y  $t \in [0, T_{\max}]$ .

Para estudiar la positividad de  $u$  tenemos que reescribir su ecuación de modo acorde para aplicar el Principio del Máximo, es decir,

$$\Delta \tilde{u} + \chi(w) \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w - \chi(w) h \tilde{u} - \tilde{u}_t = -G(\tilde{u}, v, w). \quad (5.39)$$

Utilizando la expresión de  $G$  y las hipótesis (J<sub>1</sub>) y (J<sub>3</sub>) vemos que para valores grandes de  $\tilde{u}$ ,  $v$  y  $w$ ,  $G$  se comporta de tal modo que,

$$\begin{aligned} -G(\tilde{u}, v, w) &\sim -\frac{1}{F(w)} (k\mu(v)BF(w)\tilde{u} + \alpha(v)w - DF(w)\tilde{u}) \\ &= -k\mu(v)B\tilde{u} - \frac{\alpha(v)w}{F(w)} + D\tilde{u} = (-k\mu(v)B + D)\tilde{u} - \frac{\alpha(v)w}{F(w)}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Si consideramos valores grandes de  $\tilde{u}$ ,  $v$  y  $w$ , como  $F(w)$  es una función exponencial, el último término será el más pequeño y a penas contribuirá, mientras que como  $\mu(v) \leq 1$ , la condición de  $D > kB$ , nos da el resultado  $-G(\tilde{u}, v, w) \geq 0$ . Ahora con el valor en la frontera de  $\Omega \times (0, T_{\max})$ ,  $\tilde{u}_0(x) \geq 0$ , y que los coeficientes que multiplican a los operadores laplaciano y gradiente cumplen las condiciones del Principio del Máximo de Hopf, por el Corolario 1.1.7, obtenemos el resultado

$\tilde{u}(x, t) \geq 0$  para todo  $x \in \Omega$  y  $t \in [0, T_{\max}]$ . Además como  $u = F(w)\tilde{u}$  y  $F(w) \geq 0$ , también se cumple que  $u(x, t) \geq 0$  para todo  $x \in \Omega$  y  $t \in [0, T_{\max}]$ .

Para demostrar que  $v$  está acotado también superiormente tenemos que utilizar un resultado de Alikakos demostrado en la referencia [1] y citado en el Capítulo 1 pero que recordamos a continuación.

**Lema 5.1.4** (Alikakos). *Sea  $m \geq 1$  y sea  $w(x, t)$  solución de,*

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta(|w|^m \operatorname{sgn} w) + B(x, t)w & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \leq 0 & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ w(x, 0) = w_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (5.41)$$

donde  $w_0 \in L^\infty(\Omega)$ . Sean  $c_1$  y  $c_2$  constantes que verifican que  $B(x, t) < c_1$  y

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\Omega} |w|^m dx < c_2. \quad (5.42)$$

Entonces existe una constante  $c_3$  tal que,

$$\sup_{t \geq 0} \|w\|_{\infty} < c_3 \max \left\{ 1, \sup_{t \geq 0} \left( \int_{\Omega} |w|^m dx \right)^{1/m}, \|w_0\|_{\infty} \right\}. \quad (5.43)$$

La segunda ecuación del sistema (5.1) se puede escribir utilizando la hipótesis (h<sub>4</sub>) de manera que,

$$v_t = \Delta v + f(v) - \phi(u, v) \leq \Delta v + f(v) \leq \Delta v + Ev - Fv^2 \leq \Delta v + Ev, \quad (5.44)$$

así pues por el Lema de Comparación, una función  $\varphi \in L^1(\Omega)$  que verifique  $\varphi_t = \Delta\varphi + E\varphi$  con  $\varphi(0) \geq v_0$ , va a cumplir que  $v(t) \leq \varphi(t)$  para todo  $t \in [0, T_{\max}]$ . Ahora aplicamos el resultado de Alikakos a  $\varphi$  que cumple todas las hipótesis necesarias y por comparación obtenemos que  $v$  verifica que

$$\sup_{t \in [0, T_{\max})} \|v\|_{\infty} \leq \max \left\{ 1, \|v_0\|_{\infty}, \sup_{t \in [0, T_{\max})} \|v\|_1 \right\} = Q, \quad (5.45)$$

y por lo tanto tenemos que  $0 \leq v \leq Q$ .

Por último el cuarto punto del Teorema es una consecuencia directa de un segundo resultado de Amann, esta vez demostrado en [3]. En las mismas condiciones en las que el Lema 5.1.2 de Amann aplica obtenemos el siguiente resultado.

**Lema 5.1.5** (Amann). *Supongamos que la matriz  $\mathcal{A}$  es triangular superior y que se verifica que existe  $c$  únicamente dependiente de  $|u|$  tal que*

$$|f_i(u, \partial u)| \leq c(|u|) \left( 1 + |\nabla u_i|^2 \right), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (5.46)$$

Además supongamos que para cada  $T > 0$  existe una constante  $c(T) > 0$  que depende de  $\|u\|_{1,p}$  tal que

$$\|u(t)\|_{\infty} \leq c(T), \quad 0 \leq t \leq \min\{T, T_{\max}\}, \quad (5.47)$$

entonces  $T_{\max} = +\infty$ .

Como hemos escrito en la demostración del primer punto, nuestra matriz  $\mathcal{A}$  (5.12) es triangular superior, y los componentes del vector  $f = \Phi$  verifican que,

$$\Phi_2 = f(v) - \phi(u, v) \leq Ev - F^2 \leq Ev \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_3 + k\Phi_2 &= -g(u) + f(v) - n(w)w \leq -Du + Ev - Fv^2 - Dw \\ &\leq -D(u + w + kv) + (Dk + E)v \leq -D(u + w + kv) + (Dk + E)Q, \end{aligned} \quad (5.49)$$

donde hemos utilizado las hipótesis sobre las funciones y la acotación que hemos hecho sobre  $v$  en el punto 3 del Teorema.

□

## 5.2. Acotación en $L^p$ y existencia global

En esta sección vamos a estudiar las acotaciones en  $L^\infty$  de las funciones  $u$ , y  $w$  del sistema (5.1), ya que en el tercer punto del Teorema 5.1.1 ya hemos demostrado la acotación en  $L^\infty$  de  $v$ . Para ello utilizamos el denominado *método iterativo de Alikakos*, que consiste en multiplicar las ecuaciones por una función específica que nos ayude a encontrar cotas las funciones en  $L^p$  con  $p$  cada vez mayor para así, recursivamente, llegar a una acotación  $L^\infty$  para  $p \rightarrow \infty$ .

Para las demostraciones que vamos a realizar a continuación necesitamos utilizar de nuevo la función,

$$F(w) = \exp \left\{ \int_0^w \chi(s) ds \right\}, \quad (5.50)$$

donde  $w$  es la variable correspondiente a la densidad de depredadores inactivos y  $\chi$  la función responsable de la quimiotaxis. La función  $F$  cumple que  $F'(w) = \chi(w)F(w)$ . Además volvemos a utilizar la notación  $w_t = h_3(u, v, w)$  donde aplican las hipótesis  $(h_5)$  y  $(h_6)$  para la función  $h_3(u, v, w)$ .

Comenzamos con un resultado útil para la demostración de la acotación de  $u$  en  $L^\infty$ .

**Teorema 5.2.1.** *Sea  $p > 1$  y sea  $(u, v, w)$  solución de (5.1). Definimos  $F(w)$  función positiva tal y como en (5.50). Si se verifican las hipótesis  $(h_0)$ - $(h_6)$ , entonces existe una constante  $N > 0$  de modo que*

$$\int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p} \leq N, \quad (5.51)$$

donde  $N = \|u_0^p F(w_0)^{1-p}\|_1$ .

*Demostración.* Utilizamos el método iterativo de Alikakos, esto es, calculamos la derivada temporal de la integral sobre todo  $\Omega$  de  $u^p F^{1-p}$ , expresión de la que queremos hallar la cota.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p} &= p \int_{\Omega} u^{p-1} u_t F(w)^{1-p} + (1-p) \int_{\Omega} u^p F(w)^{-p} F'(w) w_t \\ &= p \int_{\Omega} u^{p-1} u_t F(w)^{1-p} + (1-p) \int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p} \chi(w) h_3(u, v, w) \\ &= p \int_{\Omega} u^{p-1} F(w)^{1-p} [d\Delta u + k\mu(v)\phi(u, v) + \alpha(v)w - g(u) - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w)] \\ &\quad + (1-p) \int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p} \chi(w) h_3(u, v, w). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ahora estudiamos en concreto la parte de la expresión que incluye los laplacianos y los gradientes,

$$p \int_{\Omega} u^{p-1} F(w)^{1-p} [d\Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w)] = p \int_{\Omega} u^{p-1} F(w)^{1-p} \nabla \cdot [d\nabla u - u\chi(w)\nabla w], \quad (5.53)$$

utilizamos la integración por partes y las condiciones de Neumann homogéneas en la frontera, es decir,  $\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$  y  $\nabla w \cdot \mathbf{n} = 0$  en  $\partial\Omega$ ,

$$p \int_{\Omega} u^{p-1} F(w)^{1-p} [d\Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w)] = -p \int_{\Omega} \nabla(u^{p-1} F(w)^{1-p}) \cdot (\nabla u - u\chi(w)\nabla w). \quad (5.54)$$

Operamos a continuación para obtener una expresión explícita del gradiente de  $u^{p-1} F(w)^{1-p}$ , esto es,

$$\begin{aligned} \nabla(u^{p-1} F(w)^{1-p}) &= (p-1)u^{p-2} F(w)^{1-p} \nabla u + u^{p-1} (1-p) F(w)^{1-p} \chi(w) \nabla w = \\ &= (p-1)u^{p-2} F(w)^{1-p} [\nabla u - u\chi(w)\nabla w], \end{aligned} \quad (5.55)$$

de modo que la expresión (5.54) finalmente toma la forma,

$$p \int_{\Omega} u^{p-1} F(w)^{1-p} [d\Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w)] = -p(p-1) \int_{\Omega} u^{p-2} F(w)^{1-p} (\nabla u - u\chi(w)\nabla w)^2, \quad (5.56)$$

por lo que como  $u \geq 0$ ,  $F > 0$  y  $p > 1$ , obtenemos que

$$p \int_{\Omega} u^{p-1} F(w)^{1-p} (d\Delta u - \nabla \cdot (u\chi(w)\nabla w)) \leq 0, \quad (5.57)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p} &\leq p \int_{\Omega} u^{p-1} F(w)^{1-p} (k\mu(v)\phi(u, v) + \alpha(v)w - g(u)) \\ &\quad + (1-p) \int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p} \chi(w) h_3(u, v, w). \end{aligned} \quad (5.58)$$

A continuación estudiamos el último sumando a la derecha de la desigualdad en (5.58), aplicando las hipótesis (h<sub>5</sub>) y (h<sub>6</sub>) sobre la función  $h_3(u, v, w)$ ,

$$\begin{aligned} -(p-1) \int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p} \chi(w) h_3(u, v, w) &\leq -(p-1) \int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p} \chi(w) h_3(0, 0, w) \\ &\leq M(p-1) \int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Para el primer sumando a la derecha de la desigualdad en (5.58) también podemos operar utilizando la expresión explícita de  $h_3(u, v, w)$ , la relación  $\mu(v) + \nu(v) = 1$  y las hipótesis (h<sub>0</sub>)-(h<sub>6</sub>), de modo que,

$$\begin{aligned} k\mu(v)\phi(u, v) + \alpha(v)w - g(u) &= k\mu(v)\phi(u, v) - g(u) + k\nu(v)\phi(u, v) - n(w)w - h_3(u, v, w) \\ &= k\phi(u, v) - g(u) - n(w)w - h_3(u, v, w) \\ &\leq k\phi(u, v) - g(u) - n(w)w - h_3(0, 0, w) \\ &= k\phi(u, v) - g(u) - n(w)w + \alpha(0)w + n(w)w \leq kBu - Du. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Finalmente utilizando estos dos últimos resultados, (5.58) toma la expresión,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p} &\leq p(kB - D) \int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p} + M(p-1) \int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p} \\ &= (p(kB - D) + M(p-1)) \int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p} \\ &= (p(kB - D + M) - M) \int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Así pues en este punto podemos utilizar el Lema 5.1.3 ya que por la hipótesis  $(h_6)$  tenemos que  $D > kB + M$ , y entonces  $p(kB - D + M) - M < 0$  para todo  $p > 1$ . Utilizando el Lema de acotación obtenemos que,

$$\int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p} \leq \|u_0^p F(w_0)^{1-p}\|_1 = \int_{\Omega} u_0^p F(w_0)^{1-p} \equiv N < +\infty. \quad (5.62)$$

□

**Teorema 5.2.2.** *Sea  $(u, v, w)$  solución de (5.1). Si se verifican las hipótesis  $(h_0)$ - $(h_6)$  y  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ , entonces  $u \in L^\infty(\Omega)$  y está uniformemente acotado en el tiempo por una constante  $C_\infty > 0$ ,*

$$\|u\|_\infty \leq C_\infty, \quad (5.63)$$

donde, si  $\|\chi\|_1$  es la norma en  $L^1[0, \infty)$  de la función  $\chi$ , se tiene que

$$C_\infty = \exp(\|\chi\|_1) \|u_0 F(w_0)^{-1}\|_\infty. \quad (5.64)$$

*Demostración.* Partimos del resultado del Teorema 5.2.1. Es decir, sabemos que

$$\int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p} \leq \int_{\Omega} u_0^p F(w_0)^{1-p} = \int_{\Omega} \left( \frac{u_0}{F(w_0)} \right)^p F(w_0). \quad (5.65)$$

Por otro lado tenemos que  $\chi \in L^1[0, \infty)$  y  $\chi \geq 0$ , lo que implica entonces que la función  $F(w)$  es una función acotada de la siguiente manera,

$$F(w) = \exp \left\{ \int_0^w \chi(s) ds \right\} \leq \exp \left\{ \int_0^\infty \chi(s) ds \right\} = \exp(\|\chi\|_1). \quad (5.66)$$

Como  $p > 1$ , podemos utilizar el valor de la cota superior de  $F(w)$  para escribir que,

$$\int_{\Omega} u^p F(w)^{1-p} \geq \exp((1-p)\|\chi\|_1) \int_{\Omega} u^p = \exp((1-p)\|\chi\|_1) \|u\|_p^p, \quad (5.67)$$

y también en el otro lado de la desigualdad de (5.65) tenemos que,

$$\int_{\Omega} \left( \frac{u_0}{F(w_0)} \right)^p F(w_0) \leq \exp(\|\chi\|_1) \int_{\Omega} \left( \frac{u_0}{F(w_0)} \right)^p, \quad (5.68)$$

de modo que juntando estos dos últimos resultados obtenemos

$$\exp((1-p)\|\chi\|_1) \|u\|_p^p \leq \exp(\|\chi\|_1) \int_{\Omega} \left( \frac{u_0}{F(w_0)} \right)^p, \quad (5.69)$$

$$\|u\|_p^p \leq \frac{\exp(\|\chi\|_1)}{\exp((1-p)\|\chi\|_1)} \int_{\Omega} \left( \frac{u_0}{F(w_0)} \right)^p = \exp(p\|\chi\|_1) \left\| \frac{u_0}{F(w_0)} \right\|_p^p, \quad (5.70)$$

$$\|u\|_p \leq \exp(\|\chi\|_1) \left\| \frac{u_0}{F(w_0)} \right\|_p, \quad (5.71)$$

lo que nos da una cota para  $u$  en  $L^p$ , para todo  $p > 1$ .

Ahora simplemente tomando el límite cuando  $p \rightarrow \infty$ , obtenemos que

$$\|u\|_{\infty} \leq \exp(\|\chi\|_1) \left\| \frac{u_0}{F(w_0)} \right\|_{\infty} \equiv C_{\infty}. \quad (5.72)$$

□

**Teorema 5.2.3.** *Sea  $w$  solución de la tercera ecuación del sistema (5.1). Si se verifican las hipótesis  $(h_0)$ - $(h_4)$  y  $w_0 \in L^{\infty}(\Omega)$ , entonces  $\exists W > 0$  tal que  $\|w\|_{\infty} < W$  para todo  $x \in \Omega$  y  $t \in [0, \infty)$ , donde  $W$  toma la forma*

$$W = \max \left\{ \|w_0\|_{\infty}, \frac{kBC_{\infty}}{D} \right\}. \quad (5.73)$$

*Demostración.* Para la demostración de este resultado necesitamos utilizar el Lema 5.1.3 de acotación. Escribimos la ecuación diferencial ordinaria para  $w$  y utilizamos las hipótesis  $(h_1)$  y  $(h_3)$  así como la positividad de  $w$  y de la función  $\alpha$ ,

$$w_t = k\nu(v)\phi(u, v) - \alpha(v)w - n(w)w \leq kBu - (\alpha(v) + n(w))w \leq kBu - Dw. \quad (5.74)$$

A continuación aplicamos el resultado anterior sobre la acotación de  $u$  en  $L^{\infty}$  de modo que nos queda una expresión a la que podemos aplicar directamente el Lema 5.1.3.

$$w_t \leq kBC_{\infty} - Dw \quad \Leftrightarrow \quad w(x, t) \leq \max \left\{ \|w_0\|_{\infty}, \frac{kBC_{\infty}}{D} \right\}, \quad (5.75)$$

para todo  $x \in \Omega$  y  $t \in [0, \infty)$ . De modo que definimos

$$W = \max \left\{ \|w_0\|_{\infty}, \frac{kBC_{\infty}}{D} \right\}, \quad (5.76)$$

y por tanto  $\|w\|_{\infty} \leq W$ . □

Así pues finalmente para demostrar el Teorema 5.0.1 simplemente tenemos que tomar la existencia local de soluciones que hemos demostrado en el primer punto del Teorema 5.1.1 y la acotación uniforme en  $L^{\infty}$  para las tres funciones que ha sido demostrada para  $u$  en el Teorema 5.2.2 donde  $C_1 = C_{\infty}$ , para  $v$  en el tercer punto del teorema 5.1.1, donde  $C_2 = Q$  y para  $w$  en el Teorema 5.2.3 donde  $C_3 = W$ . Estos resultados implican la existencia y acotación global de soluciones para el sistema (5.1).



## Capítulo 6

# Aproximación numérica

Finalmente en este Capítulo se realiza una breve aproximación numérica al problema sobre el sistema (5.1) del Capítulo 5 utilizando herramientas pre-construidas en el software científico Matlab. La idea principal es ver gráficamente el comportamiento de las especies depredador activo e inactivo y presa para distintas formas de la función quimiotáctica  $\chi(w)$ . Como el sistema es no lineal, muy acoplado y como este no es el objetivo principal de este trabajo, se ha utilizado la función predefinida de Matlab `pdepe` para la resolución de problemas de valor inicial con ecuaciones en derivadas parciales parabólicas y elípticas 1-dimensionales.

Esta herramienta de Matlab tiene sus limitaciones pero nos permite resolver el problema para algunos casos concretos. Para la resolución con esta herramienta debemos ser capaces de encontrar funciones  $c$ ,  $f$ ,  $s$  y un coeficiente  $m$  tal que la ecuación se pueda escribir de la forma,

$$c\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^m f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \right) + s\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right). \quad (6.1)$$

Además la misma función  $f$  debe satisfacer al relación

$$p(x, t, u) + q(x, t) f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \quad (6.2)$$

en los extremos del intervalo espacial en el que queremos resolver la ecuación para alguna función  $p$  y alguna función  $q$ .

Para resolver numéricamente el sistema vamos a escribir las funciones que tomamos de modo general en (5.1) dándoles una expresión concreta basada en el estudio numérico de Kuwamura en [8] y de Wu, Wang y Shi en [15]. Estas expresiones concretas de las funciones se basan en el modelo de Rosenzweig-MacArthur, o más específicamente en el modelo de Bazykin [4] conocido como el modelo de Rosenzweig-MacArthur con interacción entre especies.

Así pues los valores que asignamos a las distintas funciones son los siguientes,

$$d = 0.0003, \quad \phi(u, v) = \frac{2.7uv}{2+v}, \quad \alpha(v) = 0.4, \quad n(w) = 0.1, \quad g(u) = (1 + 0.1u)u,$$

$$f(v) = 3v \left(1 - \frac{v}{4}\right), \quad \mu(v) = \frac{1 + \tanh(v - 0.4)}{2}, \quad \nu(v) = 1 - \frac{1 + \tanh(v - 0.4)}{2}.$$

Las funciones  $c$ ,  $f$  y  $s$  necesarias para el script de Matlab quedan definidas entonces como,

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u\chi \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \\ \nabla w \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} \mu(v)\phi(u, v) + \alpha(v)w - g(u) \\ f(v) - \phi(u, v) \\ \nu(v)\phi(u, v) - \alpha(v)w - n(w)w \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Mientras que para incluir las condiciones de contorno de Neumann tenemos que definir  $p = (0, 0, 0)^T$  en los dos extremos del dominio unidimensional,  $q = (1, 1, 1)^T$  en un extremo y  $q = (-1, -1, -1)^T$  en el otro debido a la orientación del vector normal. Esto nos asegura que se cumplen las condiciones adecuadas para  $v$  (la presa), y para  $u$  y  $w$  (depredadores activos e inactivos respectivamente) si tenemos cuidado al definir  $\chi(w)$ .

En primer lugar resolvemos las ecuaciones sin quimiotaxis, es decir,  $\chi(w) = 0$ . Lo que obtenemos nos indica que tras unas pocas oscilaciones en las funciones, se alcanza relativamente rápido un estado estacionario independiente de las condiciones iniciales. Además las oscilaciones iniciales siguen el patrón clásico del modelo depredador-presa de Lotka-Volterra.

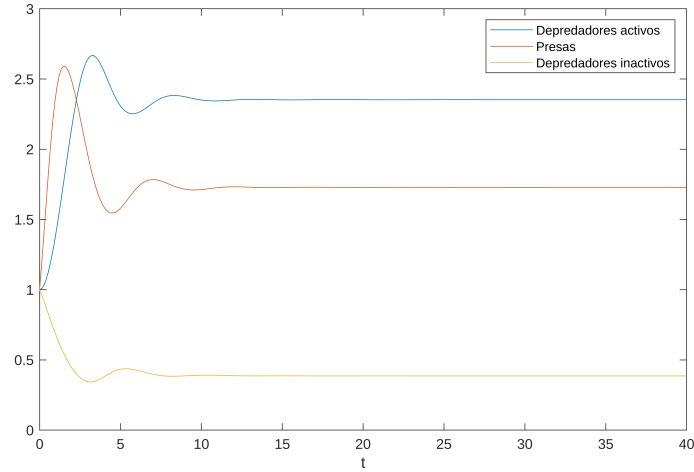


Figura 6.1:  $\chi = 0$  y condiciones iniciales homogéneas  $(u_0, v_0, w_0) = (1, 1, 1)$ .

A continuación se muestran los resultados obtenidos en el espacio y en el tiempo para distintos valores de  $\chi(w)$  y distintas condiciones iniciales. Las condiciones iniciales elegidas han sido o bien una distribución normal o bien una función coseno, ya que ambas presentan buenas propiedades de regularidad y se pueden diseñar de modo que tomen valor 0 y derivada 0 en los extremos del intervalo espacial.

Los resultados obtenidos se muestran en las siguientes figuras.

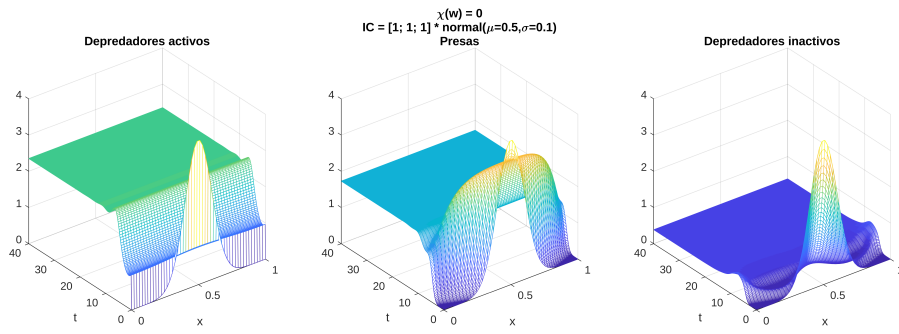


Figura 6.2:  $\chi(w) = 0$  y condiciones iniciales  $N(0.5, 0.1)$ .

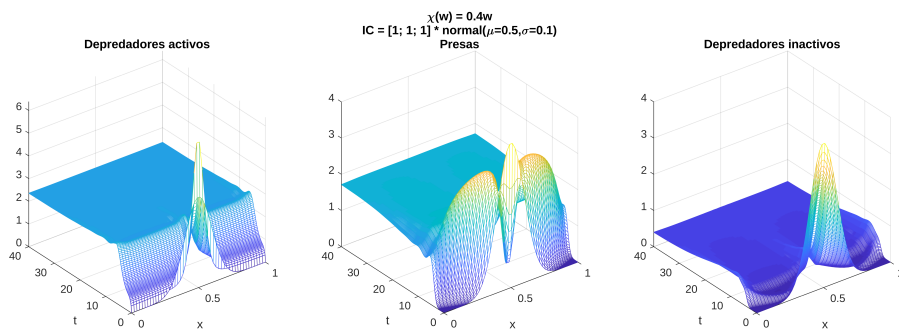


Figura 6.3:  $\chi(w) = 0.4w$  y condiciones iniciales  $N(0.5, 0.1)$ .

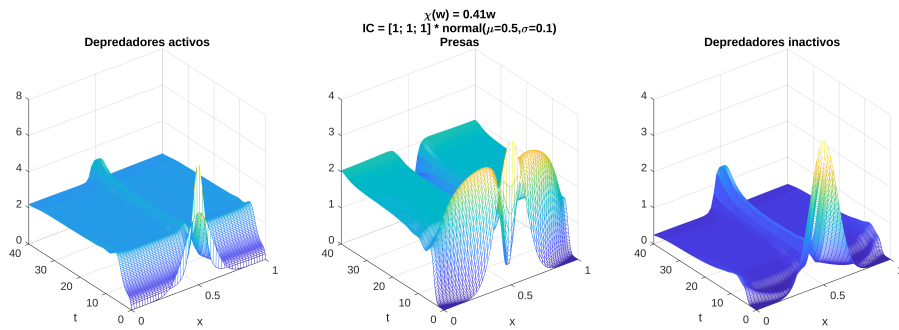


Figura 6.4:  $\chi(w) = 0.41w$  y condiciones iniciales  $N(0.5, 0.1)$ .

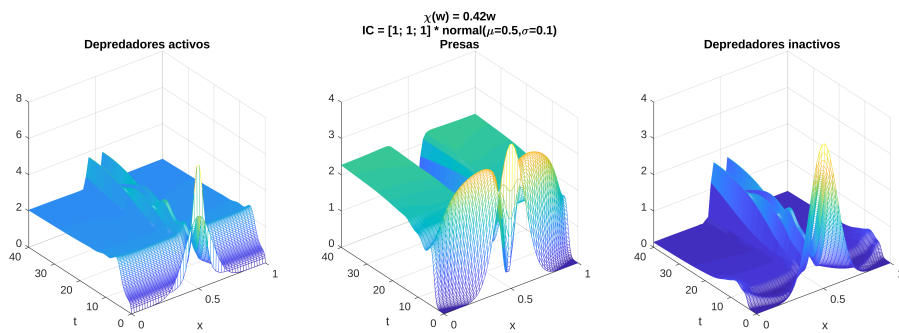


Figura 6.5:  $\chi(w) = 0.42w$  y condiciones iniciales  $N(0.5, 0.1)$ .

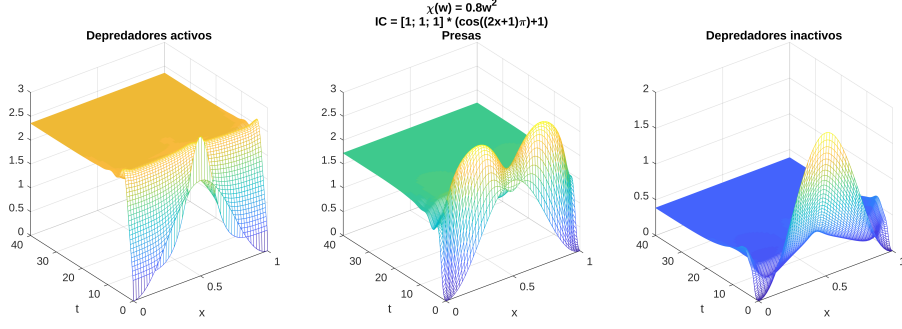


Figura 6.6:  $\chi(w) = 0.8w^2$  y condiciones iniciales  $\cos((2x + 1)\pi) + 1$ .

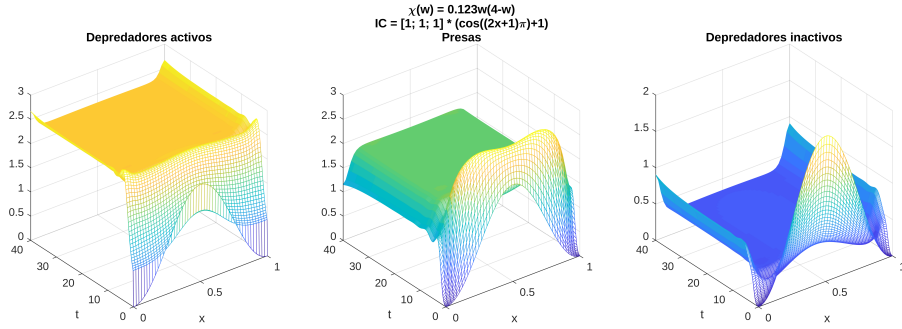


Figura 6.7:  $\chi(w) = 0.123w(4 - w)$  y condiciones iniciales  $\cos((2x + 1)\pi) + 1$ .

En los resultados se observa que, como en el caso homogéneo sin quimiotaxis, bajo ciertas condiciones todo tiende a un estado estacionario. La solución varía dependiendo de la forma de la función  $\chi(w)$ , que vemos que afecta de tal modo que la densidad de depredadores activos siempre será mayor donde también sea mayor la densidad de depredadores inactivos, lo que tiene sentido por la quimiotaxis. Además, justo en las zonas donde hay más depredadores también suceden mínimos para la función de densidad de las presas. Esto también es consistente ya que aunque en el modelo descrito por (5.1) no exista una quimiotaxis que haga que las presas se alejen de las zonas donde hay más depredadores, sí que es razonable pensar que donde más depredadores hay las presas pueden proliferar menos. Así pues la quimiotaxis  $\chi(w)$  afecta de tal modo que se alcanzan estados estacionarios definidos localmente, es decir, por zonas.

Este estudio numérico tiene muchas limitaciones pero sienta las bases para en el futuro poder desarrollar un método propio de resolución de las ecuaciones numéricamente que se adecúe mejor a nuestro caso concreto. Además esto también abre las puertas a realizar un estudio de la estabilidad de los puntos estacionarios del sistema como hace Kuwamura en [8] y comparar los resultados teóricos sobre estabilidad con las simulaciones numéricas.

# Bibliografía

- [1] ALIKAKOS, N.D.  *$L^p$  bounds of solutions of reaction-diffusion equations*. Comm. in Partial Differential Equations, 4(8), 827-868 (1979)
- [2] AMANN, H. *Dynamic theory of quasilinear parabolic equations. II. Reaction-diffusion systems*. Differential and Integral Equations, Volume 3, Number 1, January 1990, pp.13-75.
- [3] AMANN, H. *Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems*. Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Teubner-Texte zur Mathematik, Springer Fachmedien Wiesbaden, 1993, pp.9-126.
- [4] BAZYKIN, A.D. *Nonlinear dynamics of interacting populations*. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, Vol. 11, Berkeley, 1998.
- [5] BRAUN, M. *Differential equations and their applications*. Springer Texts in Applied Mathematics, 4<sup>o</sup>Ed, New York, 1975.
- [6] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Universitext, New York, 2002.
- [7] GYLLSTRÖM, M. HANSSON, L.A. *Dormancy in freshwater zooplankton: Induction, termination and the importance of benthic-pelagic coupling*. Aquat. Sci. (2004) 66: 274.
- [8] KUWAMURA, M. *Turing instabilities in prey-predator systems with dormancy of predators*. J. Math. Biol. (2015) 71:125-149. DOI: 10.1007/s00285-014-0816-5
- [9] LIU, P. SHI, J. WANG, Z. *Pattern formation of the attraction-repulsion Keller-Segel system*. Discrete and Continuous Dynamical System Series B, Vol. 18, N. 10 (2013) 2597-2625.
- [10] MURRAY, J.D. *Mathematical biology*. Springer Interdisciplinary Applied Mathematics, 3<sup>o</sup>Ed, New York, 2002.
- [11] NAKAZAWA, T. KUWAMURA, M. YAMAMURA, N. *Implications of resting eggs of zooplankton for the paradox of enrichment*. Popul. Ecol. (2011) 53:341-350.
- [12] NEGREANU, M. TELLO, J.I. *Asymptotic stability of a two species chemotaxis system with non-diffusive chemoattractant*. J. Differential Equations 258 (2015) 1592-1617.
- [13] PROTTER, M.H. WEINBERGER, H.F. *Maximum principles in differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [14] WU, S. SHI, J. WU, B. *Global existence of solutions and uniform persistence of a diffusive predator-prey model with prey-taxis*. J. Differential Equations 260 (2016) 5847-5874.
- [15] WU, S. WANG, J. SHI, J. *Dynamics and pattern formation of a diffusive predator-prey model with predator-taxis*. Math. Models Methods Appl. Sci. Vol. 28, No. 11 (2018) 2275-2312.